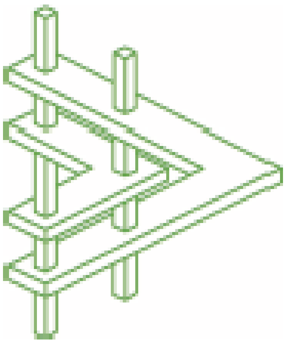
Alcuni spunti di riflessione sulla didattica della matematica

Bruno D'Amore - Martha Isabel Fandiño Pinilla – Silvia Sbaragli



Provincia di Bologna.
Assessorato Istruzione. Formazione.
Lavoro. Politiche per la Sicurezza sul Lavoro

IV DI COPERTINA

Con questa raccolta di articoli si intende fornire agli insegnanti del primo biennio della Scuola secondaria di secondo grado e della Formazione Professionale di Bologna e provincia ai quali è rivolto un ciclo di conferenze di didattica della matematica alcuni spunti di riflessione e specifici strumenti per indagare le situazioni d'aula.

Bruno D'Amore è laureato in matematica, in filosofia ed in pedagogia; PhD in Mathematics Education; insegna didattica della matematica nelle Università di Bologna, Bressanone e Bogotà e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

Martha Isabel Fandiño Pinilla è laureata in matematica, specializzata in didattica e PhD in Mathematics Education; insegna didattica della matematica nelle Università di Bologna e Bressanone e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

Silvia Sbaragli è laureata in matematica, specializzata ssis e PhD in Mathematics Education; insegna didattica della matematica nelle Università di Bologna e Bressanone e presso l'Alta Scuola Pedagogica di Locarno.

Tutti gli autori sono membri del NRD di Bologna.

In copertina: figura impossibile di Oscar Reutersärd

Indice

Presentazione

I recenti dati sugli esiti scolastici degli studenti di Bologna e provincia hanno evidenziato un'alta percentuale di debiti formativi nella promozione alle classi successive.
In particolare sulle competenze matematiche degli studenti quindicenni l'ultima indagine Ocse (Programme for International Student Assessment – P.I.S.A.) ha rivelato un grave deficit del nostro paese, rispetto agli altri testati.
Da parte nostra abbiamo sempre ritenuto che agendo sulla volontà ed il piacere di apprendere se ne condizioni l'efficacia: l'adozione di stili didattici e pratiche scolastiche attive possono influenzare i comportamenti ed i risultati degli studenti in classe.
Sull'innovazione delle metodologie e modalità didattiche per il raggiungimento dei livelli essenziali di saperi e competenze da conseguire nei primi due anni di istruzione obbligatoria si orientano del resto i documenti tecnici inviati in questi giorni a tutte le scuole (allegati al regolamento per l'obbligo di istruzione, Decreto ministeriale 139 del 22 agosto 2007).
È questo l'intento con cui abbiamo programmato un ciclo di incontri di formazione per la Didattica della Matematica. L'iniziativa vede la collaborazione scientifica del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bologna di cui il responsabile scientifico è il prof. Bruno D'Amore e intende fornire un contributo metodologico utile per migliorare la didattica delle matematica, in particolare per i docenti del primo biennio della Scuola secondaria di secondo grado e della Formazione Professionale di Bologna e provincia.
Nella speranza che il lavoro possa contribuire ad innovare le scelte metodologiche di quanti, insegnanti e formatori, vorranno porle in essere.

Tiziana Di Celmo
Responsabile Ufficio Programmazione Formativa
Servizio Scuola e Formazione della Provincia di Bologna

Premessa

Questa raccolta di articoli è stata pensata per fornire agli insegnanti coinvolti in un ciclo di incontri di formazione per la Didattica della Matematica un utile strumento per analizzare le situazioni d'aula.
L'iniziativa vede la collaborazione del Servizio Scuola e Formazione della Provincia di Bologna e del Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica dell'Università di Bologna il cui responsabile scientifico è il prof. Bruno D'Amore; essa è rivolta principalmente ai docenti del primo biennio della Scuola secondaria di secondo grado e della Formazione Professionale di Bologna e provincia.
Sebbene gli studi e le ricerche teoriche ed empiriche sul complesso processo di insegnamento – apprendimento della matematica siano le più consolidate e le più sviluppate, rispetto alle analoghe di altre discipline, è sotto gli occhi di tutti il fatto che, a fronte del sempre maggior impegno di ricercatori ed insegnanti, prosegue un fallimento strutturale nell'apprendimento da parte degli studenti.
Nonostante le spinte innovative e le sempre maggiori conoscenze che la ricerca produce, la matematica continua ad occupare un posto di rincalzo nelle simpatie di adulti e giovani, a produrre risultati negativi, a costituire una delle discipline di minor interesse. Nel processo di insegnamento – apprendimento della matematica c'è qualche cosa che non va; ci sono cioè troppe *difficoltà* nell'apprendimento della matematica.
Noi riteniamo che una pluralità di interventi e di studi, anche tra loro diversi, seppure ad intersezione non vuota, possano aiutare il lettore ad orientarsi in questo campo. Più sono gli stimoli, più è pensabile che vi sia un impulso ad analizzare le proprie situazioni d'aula, a scavare nei motivi, nelle cause di eventuali difficoltà degli allievi, non solo a scopo analitico, bensì anche per poter intervenire con consapevolezza di causa e dunque con specificità.
È in questa ottica che da pochi giorni abbiamo ultimato un libro sulle difficoltà dell'apprendimento della matematica al quale rimandiamo per un ulteriore approfondimento in questo campo [D'Amore B., andiño Pinilla M.I., Marazzani I., Sbaragli S. (2008). *Difficoltà nell'appprendimento della matematica. Il punto di vista della didattica.* Trento: Erickson], nella speranza che questi stimoli siano di aiuto a quell'insegnante che avrà la volontà di leggerlo, meditarlo, riconoscervi situazioni già vissute, usarlo.

Gli autori

L’argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya)[1]

Bruno D’Amore

NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
ASP – Alta Scuola Pedagogica - Locarno
MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas – Bogotà

Lavoro eseguito nell’àmbito del Programma di Ricerca 60% dell’Università di Bologna (Dipartimento di Matematica): «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*».

Pubblicato in: D’Amore B. (2005). L’argomentazione matematica di allievi di scuola secondaria e la logica indiana (nyaya). *La matematica e la sua didattica*. 4, 481-500.

Summary. *We introduce the characteristics of Nyaya, a strongly empiric logic that opposed Buddhism in the first centuries D.C. We show through examples realized in senior classes (14-15 years old students) how, in spontaneous situations, student’s argumentative - demonstrative behaviour is sometimes empirically closer to the Nyaya logic instead of the Aristotelian or Megarian - Stoic one dominant in our culture therefore in our schools. This behaviour is mainly characterized by the student’s need to “anchor” his argumentations to examples and to deductions that, however, take into*

[1] Questo testo è già stato oggetto di pubblicazione in lingua spagnola:
D’Amore B. (2005). La argumentación matemática de jóvenes alumnos y la lógica hindú (*nyaya*). *Uno*. [Barcellona, Spagna]. 38, 83-99. [Si trova anche negli Atti del *VII Simposio de Educación Matemática: Investigación en Didáctica de la Matemática*. 3-6 maggio 2005, Chivilcoy, Buenos Aires, Argentina. www.edumat.com.ar],
ed in lingua inglese:
D’Amore B. (2005). Secondary school students’ mathematical argumentation and Indian logic (nyaya). *For the Learning of Mathemaics*. [Edmonton, Alberta, Canada]. 25 (2), 30-38.
Si ringrazia per il permesso di pubblicazione in italiano la rivista *For the Learning of Mathematics* cui appartengono i diritti.

account, from the very beginning the thesis he wants to reach, as already acquired.

Sunto. *Si introducono le caratteristiche della nyaya, logica che si oppose al buddismo nei primi secoli d. C., fortemente empirica, per mostrare, grazie ad esempi realizzati in classi di prima superiore (età degli allievi 14-15 anni), come talvolta il comportamento argomentativo - dimostrativo di uno studente, in situazione spontanea, sia più empiricamente vicino alla nyaya che non alla logica aristotelica o megarico – stoica, dominanti nella nostra cultura e dunque nella nostra scuola. Questo comportamento è soprattutto caratterizzato dalla necessità che ha lo studente di "ancorare" la propria argomentazione ad esempi e a deduzioni che però tengano presente fin dall'inizio la tesi cui si vuol giungere, come già acquisita.*

1. Premessa

Questo articolo trae origine dalla constatazione di "fallimenti" nei processi dimostrativi da parte di giovani studenti delle scuole superiori, almeno rispetto alle "attese" dei loro insegnanti.
Recentemente, vari Autori hanno contribuito a studiare il complesso fenomeno dell'apprendimento della dimostrazione (si può vedere Balacheff, 2004, che contiene un'importante presentazione delle diverse recenti ricerche in questo settore, con le loro peculiarità). Vi sono in questo campo posizioni anche molto diverse, più formaliste (Duval, 1991, 1993; Duval, Egret, 1993) o quasi empiriste alla Lakatos (Hanna, Janke, 1996). La stessa terminologia è fonte di diverse interpretazioni; "proof" (in inglese) e "demonstration" (in francese) hanno significati diversi, tanto che c'è chi propone di chiamare in inglese la dimostrazione "mathematical proof". Per tutto ciò, rinvio a Balacheff (2004) ed alla sua bibliografia.
Inoltre, anche se solo riferiti alla geometria, diversi lavori mostrano, per esempio, le enormi difficoltà che incontrano gli studenti nel difficile compito di usare la quantificazione (Durand-Guerrier, 1999). Ma perfino Pascal (1985) si era accorto che nelle dimostrazioni, pur riferendosi a quella che noi oggi chiameremmo una quantificazione, di fatto ci si ancora ad esempi generici.
In tutto ciò, però, resta sempre comune, come quadro logico, il calcolo delle proposizioni ed i primi elementi del calcolo dei predicati del I ordine (Durand-Guerrier, Arsac, 2003).
Osservando a lungo studenti impegnati a dimostrare, come attività personale ma all'interno della classe, dunque, alla fine, come attività sociale, mi sono accorto che, pur nelle molte tipologie di comportamento più o meno spontaneo, teso a soddisfare la richiesta dell'insegnante (cioè una modalità che resta più o meno legata alla

logica aristotelica o megarico – stoica), vi era da parte di alcuni studenti una modalità dimostrativa che avrebbe potuto essere studiata in modo diverso da quella attesa dall'insegnante; tale modalità metteva in evidenza alcuni fattori, come il ricorso ad esempi, come l'enunciazione preliminare della tesi etc., che ricorda molto da vicino una logica di tutt'altro genere.
È così nata l'idea di raccogliere testimonianze di applicazione inconsapevole di questa logica, a soli scopi analitici, in questo articolo. In esso, nel paragrafo 1 presento gli elementi di base di tale logica; nei paragrafi 2 – 3 – 4 presento tre "casi" che considero emblematici; nel paragrafo 5 presento alcune riflessioni anche a carattere didattico.
In maniera esplicita voglio mettere in evidenza che qui non si tratta di sostituire una logica ad un'altra nell'educazione scolastica; dall'esperienza fatta e qui narrata, emerge solo il fatto che, per ragionare, gli allievi hanno una tendenza forte ad utilizzare i casi particolari per "leggervi" e "vedervi" il generale; si ha la prova di una dialettica tra la generalizzazione (o astrazione) e la "concretizzazione" della quale dobbiamo necessariamente tener conto durante l'insegnamento.
L'approccio nyaya mostra che altre culture hanno prodotto dei meccanismi intellettuali di generalizzazione e di predicazione del "vero" che sono diversi dalla logica di Aristotele. Per avere riferimenti alla nyaya, si veda, ad esempio, Needham (1959), D'Amore, Matteuzzi (1976) o, più recentemente, Sarma (2005), Sarukkai (2005).
Io non credo, anche dopo questa ricerca, che questi studenti pensino in esatto accordo con la logica nyaya. Il ricorso a questa logica nell'analisi del ragionamento matematico degli studenti evidenzia tuttavia il fatto che l'analisi didattica presuppone, in un modo o nell'altro, una cornice di riferimento e che ci sono diverse cornici logiche possibili per dare una spiegazione del comportamento deduttivo degli studenti. Un interessante risultato di questa ricerca consiste nel fatto che ogni interpretazione della deduzione suppone un quadro logico di riferimento e che i comportamenti devianti sono relativi al quadro che si prende come riferimento.

2. Cenni sulle caratteristiche della scuola filosofica nyaya

Per quanto gli studi delle filosofie orientali non siano contemplati negli usuali programmi di studio nelle scuole europee, credo sia tuttavia piuttosto noto che in India, alla scuola buddista classica, si oppose una dottrina filosofica che, seguendo la denominazione sanscrita, si usa chiamare *nyaya* (che, letteralmente, significa *logica*: è

dunque privo di senso dire che la logica di quella scuola fosse la logica nyaya…). Quel che si può subito dire è che, a differenza della filosofia buddista, la nyaya tenne in grande considerazione la speculazione razionale quale base di una coerente dottrina della conoscenza, avvicinandosi a quella che noi oggi chiameremmo logica deduttiva, cui la logica buddista invece rinunciò.
La base della scuola nyaya era di forte carattere empirico, come vedremo, dunque estremamente diversa da quella aristotelica greca che, nel mondo intero, ebbe poi il sopravvento, determinando, tra l'altro, un modo di trattare la dimostrazione in matematica che persiste tuttora (almeno a livello accademico, non certo nella fase del suo apprendimento da parte di giovani studenti).
Tanto per avere qualche parametro di riferimento storico, il principe Gotama (detto appunto "il budda", il risvegliato, l'illuminato) visse nel VI-V sec. a. C., dunque la religione che prende il nome dal suo epiteto si sviluppò nettamente prima dell'aristotelismo in Grecia (III sec. a. C.); mentre il primo testo di filosofia nyaya (il *Nyaya-sutra* di Gautama) è del I sec. d. C. La filosofia si sviluppò nei secoli successivi (con i celebri commentari di Vatsyayana, V sec. d. C.; di Uddoyotakare, del VII-VII sec. d.C.; fino ad una sorta di neo-nyaya, nel XIII sec. d. C., con a capo il filosofo Gangesa).
Negando un principio trascendente dell'universo (il che è peraltro tipico di molte dottrine indiane), la nyaya costruisce una fisica atomistica di stampo realistico, propugnando l'esistenza di nove sostanze primordiali ed un sistema di sedici categorie oggettive immanenti al reale. La sua gnoseologia era fondata sull'affermazione dell'unità tra la conoscenza puramente sensibile (quella relativa al mondo esterno) e la conoscenza discorsiva (relativa cioè al linguaggio comunicativo, quale che fosse). Si realizza quindi una forma di esistenza nella quale anche i concetti comunicabili sono enti reali.
La scuola nyaya affermava l'egemonia di quattro "mezzi di conoscenza" (pramana):

- la testimonianza
- l'analogia
- la percezione
- l'inferenza

che esaminerò in dettaglio.
La testimonianza (sabda) comprende tutto ciò che di scritto o di tramandato oralmente è degno di fede. Ne fanno parte le preghiere, la rivelazione di Dio, la storia tramandata, i poemi sacri.
L'analogia (upamana; c'è chi la traduce "comparazione" e chi "equivalenza") è la forma di ragionamento che porta ad una

definizione dell'oggetto dovuta alla somiglianza con altri. Si noti che l'analogia nyaya classifica gli oggetti in categorie o classi di analoghi, distinguendo due classi tra loro in base al fatto che non hanno termini analoghi. Ora, dato che l'analogia tra oggetti esistenti è dovuta a considerazioni relative all'oggetto (e quindi non astratte, ma classificatorie e sperimentali), questa forma di conoscenza non può non richiamare alla nostra attenzione alcune delle concezioni attuali, anche in matematica. Si pensi in geometria alle definizioni per genere prossimo e differenza specifica o, ancora più evolute, le definizioni cosiddette analitiche che individuano classi per mezzo di un passaggio al quoziente, dunque in base ad una relazione di equivalenza.
La percezione (pratyaska) è la relazione tra l'oggetto visibile (ciò che cade sotto gli occhi) o comunque sensibile (relazione prodotta dal contatto da un organo di senso con l'oggetto) e la nostra immagine di esso. Tralasciamo considerazioni relative ai sei sensi che i filosofi nyaya riconoscevano all'uomo, per ricordare l'importanza che attribuivano al sesto senso, l'intelletto (manas), a causa della funzione ordinatrice e mediatrice che questo "organo" ha, rispetto agli altri cinque. Ricordiamo che i concetti comunicabili acquistano una loro realtà, nella filosofia nyaya, in contrapposizione alla pura immagine mentale che attribuivano loro i buddisti.
E arriviamo all'inferenza (anumana) che rappresenta, nella scuola nyaya, il momento sublime.
Non è molto conosciuto il cosiddetto *sillogismo* nyaya (lo chiamiamo così come è oramai d'uso per via della sua forma simile, per certi versi, almeno all'apparenza, a quello aristotelico). La nyaya distingueva nel suo sillogismo cinque elementi assertivi (e non tre, come nel sillogismo aristotelico):

- l'asserzione (pratijna) (non dimostrata; è l'enunciazione di quel che si vuol dimostrare)
- la ragione (hetu)
- la proposizione generale o enunciato (udaharana), seguita da un esempio
- l'applicazione (upanaya), detta anche seconda asserzione,
- la conclusione (nigamana).

Il seguente esempio è un classico nyaya (così come lo pseudo sillogismo di Socrate lo è per quella aristotelica):

1. l'oggetto A si muove (asserzione)
2. perché gli è stata applicata una forza (ragione)

3. ogni volta che si applica una forza ad un oggetto, esso si muove (proposizione generale); per esempio: se si attaccano buoi a un carro, esso si muove (esempio)
4. all'oggetto A è stata applicata una forza (applicazione)

dunque

5. l'oggetto A si muove (conclusione).

È abbastanza facile mettere in forma simbolica questo ragionamento; lo facciamo come esercizio.
Prima di procedere introduciamo un opportuno simbolismo; siano:
A, B oggetti dati, X un oggetto generico;
P(X): l'enunciato predicativo aperto "X si muove"
F(X): "a X è applicata una forza".
L'enunciato aperto F(X) è vero ogni volta che, sostituita al posto della variabile X una costante A, F(A) è sperimentalmente verificabile (nel senso: la sua verità cade sotto i sei sensi) (questa, almeno, è l'interpretazione empirista nyaya).
Il sillogismo nyaya si può allora formalmente interpretare come segue:

Asserzione:	1.	P(A)	asserzione (non ancora provata)
Ragione:	2.	F(A)	causa che si asserisce di P(A)
Tesi:	3.	$(\forall X)\ [F(X) \rightarrow P(X)]$	proposizione generale
		esempio: $F(B) \rightarrow P(B)$	esempio
Applicazione:	4.	F(A)	dal caso generale si torna al caso in esame: una forza esercita una azione su A
Conclusione:	5.	P(A)	A si muove

La critica buddista classica rifiuta i momenti primo e secondo, dato che essi non fanno parte del ragionamento vero e proprio, ma sono inglobabili in una tesi.
Tuttavia, quel che voglio evidenziare è che questa apparentemente inutile perdita di tempo si fa spesso nel ragionare comune, per esempio nell'azione didattica: si mette cioè in vista fin dall'inizio quanto si vuol dimostrare alla fine; diversamente non si organizzerebbe proprio *quel* ragionamento. Su questo punto dovremo tornare più avanti.
A torto, comunque, i buddisti rifiutavano il quinto momento, nel quale si compie una sorta di *modus ponens* allargato al calcolo dei predicati,

un'operazione logicamente corretta ed essenziale al funzionamento di quel tipo di sillogismo, che potremmo esprimere linguisticamente come segue:

$$\{(\forall X)\,[(F(X)\rightarrow P(X)] \wedge F(X)] \;\rightarrow\; P(X)\} \;\rightarrow$$
$$\{[(F(A)\rightarrow P(A)) \wedge F(A)] \;\rightarrow P(A)\}$$

L'analisi logica della lingua, in relazione alla stretta connessione attribuita alla dicotomia linguaggio-pensato, porta i nyaya a definire un'esatta critica del linguaggio che rasenta sistemi retorici moderni.
Nemici del corretto dedurre o del parlare sono, per i nyaya:

- l'ambiguità (chala) che si realizza ogni volta che un termine viene usato a sproposito (in sostanza, si tratta di un cattivo uso dell'analogia)
- l'inconclusione (jati), discorso circolare senza contenuto
- gli argomenti assurdi (nigrahastama) cui ricorre chi non ha logica; il destino di costui è d'essere dialetticamente sconfitto da chi opera con logica e con argomentazioni razionali.

I filosofi nyaya studiarono poi i casi in cui i loro sillogismi portavano a sofismi; ecco i casi principali di questa deleteria riduzione:

- inesatta rispondenza tra le varie parti costituenti il sillogismo, per cui non c'è relazione tra i termini
- assurdo intrinseco che appare in un termine che afferma il contrario di ciò che vorrebbe asserire
- assurdo esplicito dovuto alla contrapposizione di due termini del sillogismo che si escludono a vicenda
- la mancanza di una dimostrazione o verifica di uno dei termini su cui poggia il ragionamento
- la falsità del termine maggiore o l'inesistenza dell'oggetto in questione[2] o l'attribuzione di false proprietà ad esso.

Da qui si vede bene come la nyaya sia diversa dalla logica aristotelica dato che si basa essenzialmente sulla verifica empirica, sul contatto con il mondo esterno,[3] intendendo per mondo non solo l'insieme delle cose e dei fatti ma pure dei pensati, come fossero entità reali ("reali"

---

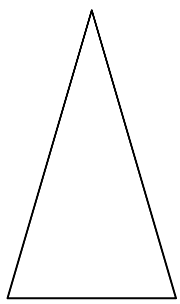
[2] Su questo punto, si ricordi la posizione di Aristotele nei confronti dell'insieme vuoto ed il superamento della questione da parte di Gergonne (D'Amore, 2001, 17-54).

[3] Il che non solo non era contemplato, ma del tutto inviso alla filosofia greca trionfante (Socrate-Platone-Aristotele) che, su questo punto, in modo più o meno esplicito, proseguiva nel ripudiare la *doxa* a favore della scelta parmenidea della *aletheia*. Naturalmente, discorso a parte meriterebbero i tentativi dei Sofisti che, però, furono soggiogati dal trionfo di Aristotele e dalle (precedenti) argomentazioni dialogiche di Platone.

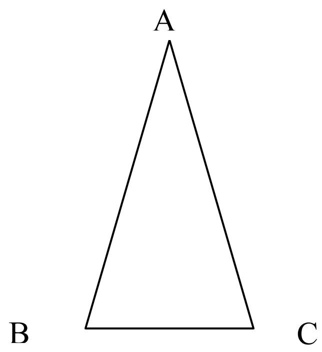
non semplicemente “esistenti”, per non credere che si possa fare un paragone con il platonismo).
Bisogna qui ricordare che la nostra attuale distinzione tra logica degli enunciati e logica dei predicati non rende giustizia allo sviluppo storico effettivo della disciplina; la logica degli enunciati non è così potentemente presente nell’opera di Aristotele come lo è oggi in qualsiasi trattato: essa deriva dagli studi dei filosofi Megarici e Stoici e, paradossalmente, si è affermata più tardi, mentre la logica dei predicati è essenziale per capire, da un punto di vista moderno, la sillogistica di Aristotele. In aula, nelle lezioni di logica nella scuola media superiore, si tratta soprattutto la logica degli enunciati e si tenta di applicarla, come esempio, alle dimostrazioni geometriche alle quali non sempre e non del tutto essa è adatta. Per esempio, nelle dimostrazioni occorre spesso quantificare su variabili, cosa che non ha senso nella logica enunciativa.
Un’analisi molto approfondita sui modi di ragionamento e sulle loro modellizzazioni logiche da parte di esperti (matematici, docenti universitari) e da parte di studenti (universitari, ai primi anni) è quella condotta da Durand-Guerrier e Arsac (2003). Gli Autori mostrano, tra l’altro, concezioni diverse dell’uso e della necessità d’uso dei quantificatori nelle dimostrazioni da parte degli esperti e da parte degli studenti.

3. Argomentazioni e dimostrazioni in aula: il caso di Filippo

Per diversi motivi, i tre esempi che mostrerò non sempre sono *perfettamente* assimilabili alla logica nyaya, ma molto molto vicini ad essa; risulta però interessante, a mio avviso, prendere in considerazione l’idea di studiare la logica nella quale gli studenti affrontano la dimostrazione perché questo potrebbe avvenire con logiche diverse da quella aristotelica. Questo è quel che accade nei seguenti tre esempi.
Quel che voglio evidenziare, per cominciare, è il ragionamento di Filippo, un allievo di 14 anni (I superiore), che affronta il seguente compito (tale compito è scritto su un foglio che viene dato a Filippo):
«Dimostrare che se in un triangolo vi sono due lati congruenti, allora vi sono anche due angoli congruenti».
Filippo viene registrato (quel che fa è aggiunto da me stesso).
Filippo disegna un triangolo scaleno, poi lo cancella. Dopo di che disegna un triangolo isoscele con il lato diverso dagli altri due come base, cioè parallelo al lato corto del foglio più vicino a sé:

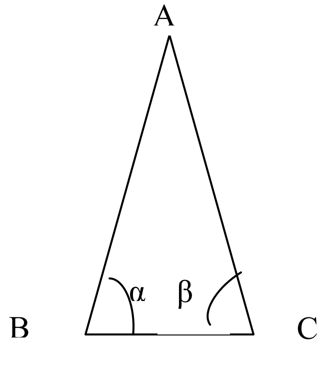


A quel punto Filippo mette delle lettere sui vertici:



Nel fare ciò, si sente un suono che esce dalla sua bocca, come se si stesse concentrando; ma non sono parole.
A quel punto guarda il ricercatore e gli chiede:
F: - Ci devo mettere gli angoli?
R: - In che senso?
F: - Ce li devo scrivere?
È chiaro quel che intende dire, ma il R. fa finta di non capire:
R: - Fa quel che credi giusto.

Filippo allora aggiunge alla figura la denominazione degli angoli alla base:



F. guarda soddisfatto il ricercatore, cercando approvazione.

R: - Vai pure avanti.
Filippo legge attentamente il foglio sul quale compare il testo del compito propostogli e, di quando in quando, guarda il proprio disegno. Poi esclama:
F: - Alfa è uguale a beta. Ecco sì, alfa [e lo indica con la punta della matita] è uguale a beta [idem].
Poi guarda il ricercatore.
R: - È quel che vuoi dimostrare o è quello da cui parti?
Filippo tace, rilegge, guarda la figura, rilegge ancora e dice:
F.: - No, no, non parto da qui, questo è quel che mi chiede lei.
R.: - Dunque?
F.: - Io so che AB è uguale a AC; qui [e indica i due lati con la punta della matita sulla sua figura, facendo scorrere minuziosamente la punta su entrambi i lati]. Questi due qui sono uguali.
Il ricercatore tace.
F.: - Ma se questi due [e indica i lati, però solo toccandoli ciascuno con la matita in un punto al loro interno] sono uguali, per forza anche questi qui [idem con gli angoli], gli angoli insomma sono uguali.
R.: - Ah sì?
F. – Come no?, per forza, se AB è 3 e AC è 3, allora alfa e beta saranno, che so, 60.
R.: -Perché 60 gradi? Non potrebbero essere 40 gradi?
F.: - Sì, credo di sì. Mi è venuto 60 gradi, ma credo che potrebbe essere qualsiasi [intende dire ampiezza].
Filippo guarda il ricercatore come se il compito fosse finito.
R.: - Allora? Possiamo concludere il compito? Che cosa puoi affermare?
F. : - Io credo che tutte le volte che i lati sono uguali, allora anche questi due angoli qua, quelli di sotto [e tocca con la punta della matita i due angoli] devono essere per forza uguali. Quindi, mah, io credo che sia così, che ho detto bene. I due lati qui del triangolo [e tocca l'interno del triangolo] sono senz'altro uguali e quindi anche gli angoli, no?

Se esaminiamo il comportamento argomentativo – dimostrativo di Filippo, si rivelano quasi esattamente le fasi previste dai filosofi nyaya:

1.	Alfa è uguale a beta. Ecco sì, alfa è uguale a beta.	P(A)
2.	Io so che AB è uguale a AC; qui. Questi due sono uguali.	F(A)

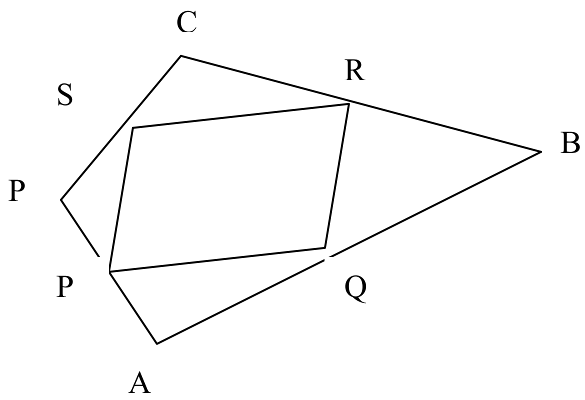
3.	Ma se questi due sono uguali, per forza anche questi qui, gli angoli insomma sono uguali.	$(\forall X)[F(X) \rightarrow P(X)]$
	Se AB è 3 e AC è 3, allora alfa e beta saranno, che so, 60.	Esempio
4.	I due lati qui del triangolo sono senz'altro uguali	F(A)
5.	e quindi anche gli angoli [sono uguali]	P(A)

In effetti, Filippo NON ha dimostrato affatto il teorema che gli veniva proposto, ma ha argomentato come se la implicazione ($AB=AC \rightarrow \alpha=\beta$) fosse scontata. Ma qui non stiamo esaminando la correttezza dello svolgimento del compito; qui stiamo esaminando il comportamento *spontaneo* di Filippo di fronte al compito. La sua principale preoccupazione non è quella di condurre la dimostrazione euclidea, ma di convincere (sé stesso o il ricercatore) che davvero le cose stanno com'è scritto sul foglietto-compito.
A dir la verità, Filippo è solo un esempio tratto da una decina di interviste tese a verificare questa idea: *che il comportamento argomentativo - dimostrativo di uno studente, in situazione spontanea, è a volte più empiricamente vicino alla nyaya che non alla logica aristotelica o megarico-stoica*.
Tra tutti gli studenti (quindicenni o sedicenni) intervistati, Filippo costituisce uno dei casi più eclatanti perché, a mio avviso, percorre proprio tutte le tappe nyaya; ma molti altri studenti tendono a comportarsi così, anche se i più scolarizzati (D'Amore, 1999) sono meno propensi a lasciarsi andare in modo spontaneo e cercano, almeno all'inizio, in qualche modo, di prolungare i lati AB e AC, di disegnare segmenti etc., come probabilmente ricordano di aver visto o di aver fatto. Molti, però, in maniera più o meno lampante e riconoscibile, seguono i passi nyaya, cercando l'esempio al III passo, fosse anche solo figurale, anche senza esplicitare misure, come fa Filippo.
Vedremo nei prossimi paragrafi altri due esempi.

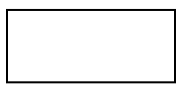
4. L'esempio "doppio" di Giada

Giada frequenta la I superiore, ha 15 anni ed è dichiarata dall'insegnante "molto portata" per la matematica. La dimostrazione che le propongo è la seguente (che trovo sul suo libro di testo tra gli esercizi):

«Dato il quadrilatero ABCD, siano PQRS i punti medi dei suoi lati; si congiungano tali punti; si dimostri che il quadrilatero così ottenuto è un parallelogramma».
Giada esegue questo disegno a matita su un foglio bianco:

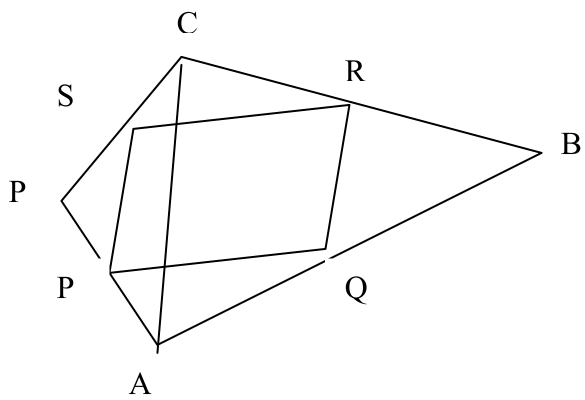


G.: - Ecco, questo.
R.: - Sì?
G.: - L'ho fatto male.
R: - No, no, va bene, si capisce bene.
Giada rilegge il testo.
G.: - Allora, PQRS deve essere un parallelogrammo… [sul libro di testo è scritto "parallelogramma", ma Giada userà sempre "parallelogrammo", forse perché usato in aula].
Istanti di silenzio, poi:
G.: - … sì, perché [e scrive sul foglio, pronunciando contemporaneamente ad alta voce] PQ//RS e PS//QR. Sì. [Guarda l'intervistatore].
R.: - Ah.
G.: - Sì, no, è così. Quando i lati del quadrato [ma intende dire quadrilatero] sono paralleli a due a due, allora il quadrato [ma intende dire quadrilatero] è un parallelogrammo. [Guarda l'intervistatore, poi il proprio disegno].
Giada si mette la matita in bocca, poi disegna quel che segue:



dicendo contemporaneamente:

G.: - Ecco, per esempio, questo ha i lati paralleli a due a due [e tocca con la punta della matita a due a due i lati opposti].
R.: - Ecco.
G.: - Nel nostro caso è così perché PS è parallelo a QR e anche PQ a PS, no a SR.
Silenzio.
G.: - Dunque è vero: PQRS è proprio un parallelogrammo. [Guarda l'intervistatore, ma con qualche dubbio].
R.: - Sì, ma come fai a dire che PQ è parallelo a RS?
Giada guarda il disegno iniziale:
G.: - Ah, òh, devo far vedere che PQ è [questa prima parte è in tono affermativo, poi cambia in tono interrogativo] …parallelo a RS? Sì, paralleli, PQ parallelo a RS.
Si ferma un po' a riflettere.
G.: - Beh, perché tutti e due forse perché sono credo paralleli ad AC [e traccia AC sulla prima figura, quella iniziale].



G.: - Sì, perché, lo so, mi ricordo, perché c'è il triangolo ACD e così S e P sono quei punti medi. Si vede.
R.: - Bene. Dunque?
G.: - [Sembra citare a memoria una frase fatta] Se due linee [ma vuol dire rette] sono parallele ad una stessa linea, allora sono parallele anche loro. Si vede anche qui [con la punta della matita ripassa SP, RQ e CA].
R.: - Ah.
G. - Sì. [Riflette]. Beh, uguale si ha anche per gli altri due [intende dire che un ragionamento analogo si piò ripetere per RS e PQ rispetto a BD].
R.: - Quali?
[Giada in silenzio passa sopra i tre segmenti RS, PQ e BD].

G.: - Sì sono tutti paralleli. SP, RQ, AC e poi SR, PQ, BD. Ma anche… Ecco! Era così la tesi, no?

Ho chiamato “doppio” l’esempio di Giada perché, a mio parere, nell’elaborato di Giada il modello nyaya si presenta due volte.
Nella prima parte:

1.	PQRS deve essere un parallelogrammo	$P(A)$
2.	perché PQ//RS e PS//QR. Sì.	$F(A)$
3.	Quando i lati del quadrato [quadrilatero] sono paralleli a due a due allora il quadrato [idem] è un parallelogrammo	$(\forall X)\ [F(X)\rightarrow P(X)]$
	Ecco, per esempio [disegno di un rettangolo, che vorrebbe essere un parallelogramma generico]	Esempio
4.	Nel nostro caso è così perché PS è parallelo a QR e anche PQ a (…) SR	$F(A)$
5.	Dunque è vero: PQRS è proprio un parallelogrammo	$P(A)$

Ma poi l’intervistatore chiede ragione dell’affermazione PQ//RS; e qui inizia la seconda parte:

1.	devo far vedere che PQ è parallelo a RS; sì, paralleli, PQ parallelo a RS	$P(A)$
2.	perché tutti e due forse perché sono credo paralleli ad AC. Sì, (…) perché c’è il triangolo ACD e così S e P sono quei punti medi.	$F(A)$
3.	Se due linee [rette] sono parallele a una stessa línea [retta] allora sono parallele anche loro.	$(\forall X)\ [F(X)\rightarrow P(X)]$
	Si vede anche qui.	Esempio
4.	uguale si ha anche per gli altri due. (…) Sì, sono tutti paralleli SP, RQ, AC e poi SR, PQ, BD.	$F(A)$
5.	Ma anche… Ecco! Era così la tesi, no?	$P(A)$

Al di là di usi impropri di termini, Giada dimostra davvero una certa qual padronanza della matematica; si sa che nella versione orale del linguaggio è facile dire una cosa per l’altra (“quadrato” invece di “quadrilatero”, “linea” invece di “retta”), ma ciò non pregiudica il giudizio sulla sua azione: Giada assolve bene al compito con una conduzione argomentativa facilmente ascrivibile ad un comportamento nyaya.

5. L'esempio di Pitto

"Pitto" è il nomignolo con il quale tutti in aula chiamano Pietro (anche l'insegnante), uno degli studenti più popolari di una I superiore, 15 anni compiuti.

A tutta la classe è proposto il seguente compito: «La somma di tre numeri naturali consecutivi è senz'altro divisibile per 3» un classico facile esercizio che mette però in campo varie strategie.

Non racconto l'esperienza visto che il mio scopo è preciso, anche se vi sono stati risultati di grande interesse; inutile dire che, come conferma la ben nota letteratura di ricerca sull'argomento, moltissimi studenti si limitano a dare esempi [tra i quali appare un -1+0+1, curioso, ma non aderente alla richiesta di usare numeri naturali; tale esempio ha sollevato l'ovvio eterno problema di decidere se 0 sia o no divisibile per 3]. Ma non voglio andare fuori tema.

In particolare, tra le interviste, tutte molto interessanti, spicca quella di Pitto che sembra fare al caso nostro.

Pitto scrive dapprima $a+b+c$ e guarda il ricercatore.

P.: - Devo fare la somma…

R.: - Di che cosa?

P.: - Eh. Di tre numeri naturali.

R.:- Qualsiasi?

P.: - Sì.

R.: - Sicuro? Leggi bene.

P.: - Consecutivi. Come, non so, 5, 6, 7, così? [Scrive staccati 5 6 7].

R.: - Sì; come sono fatti tre numeri consecutivi; prova a pensarci in generale… Come lo chiami un numero, in generale?

P.: - Ah, sì, n. Sarebbe come dire [e intanto scrive]: n poi n+1 e poi n+2.

Si ferma e scrive la somma: $n+(n+1)+(n+2)$ esattamente così, con le parentesi giuste.

R.: - Ah sì, così va bene. Dunque?

P.: - [Rilegge il testo] Dunque questo [e indica $n+(n+1)+(n+2)$] è divisibile per 3. Beh 5 più 6 più 7 [e mette i segni + tra 5 e 6 e tra 6 e 7 nella scrittura precedente] che fa 11 e 7, 18. [Prosegue scrivendo = 18]. Che 18 è divisibile per 3. Perché esiste un t tale che $n+(n+1)+(n+2)$ è $3t$ come prima che t è 6.

Pitto guarda l'intervistatore che fa un cenno di assenso.

P.: - Se trovo t ogni volta allora sarebbe [e riscrive tutto daccapo] $n+(n+1)+(n+2)=3t$ e quindi è sempre [tocca con la punta della penna il primo membro di questa uguaglianza] n più n+1 più n+2 divisibile per 3. Per esempio 1 più 2 più 3 è con t uguale a 2.

R.: - Bene. Molto bene. Allora come fai a dimostrare quel che vuoi?

Pitto riscrive, ancora una volta, $n+(n+1)+(n+2)$ e poi cerca di eseguire trasformazioni di trattamento semiotico. Inutile dire che prima scrive n^2+1 perché lui stesso si corregge pronunciando un "No" secco e cancellando accuratamente questo tentativo. Poi scrive $2n+1+n+2$ e dice:
P.: - … che fa $3n+3$. Ecco qui c'è il 3.
E scrive "$= 3(n+1)$".
Mentre con la punta della penna colpisce il 3, guarda l'intervistatore.
R.: - Bene, ci siamo dunque.
P.: - Eh sì, sì.
Sul foglio, a partire dall'$(n+1)$ che appare a secondo membro dell'uguaglianza, scrive un $= t$ un po' di traverso.
Pitto è soddisfatto e commenta:
P.: - Ah, è stata bella, ve' qui. [Tocca con la punta della penna l'ultima uguaglianza e dice] È sempre 3 per quello in mezzo.

Esaminiamo il comportamento di Pitto la cui argomentazione è senz'altro riconducibile ad un comportamento nyaya.

1.	$n+(n+1)+(n+2)$ è divisibile per 3	P(A)
	5+6+7 che fa (…) 18. Che 18	
	è divisibile per 3	Esempio di P(A)
2.	Perché esiste un t tale che	
	$n+(n+1)+(n+2)$ è $3t$	F(A)
	come prima che t è 6	Esempio di F(A)
3.	Se trovo t ogni volta allora sarebbe	
	$n+(n+1)+(n+2)=3$t e quindi è	
	sempre $n+(n+1)+(n+2)$ divisibile per 3	$(\forall X)\ [F(X)\rightarrow P(X)]$
	Per esempio 1+2+3 è con $t=2$	Esempio
4.	$[n+(n+1)+(n+2)]$ che fa	
	$3n+3$ (…) $= 3(n+1)$ $[= 3t]$	F(A)
5.	È sempre 3 per quello in mezzo $[3(n+1)]$	P(A)

In questa argomentazione riassunta in modo schematico si vede bene come Pitto senta il bisogno di "ancorare" ancora di più il suo ragionamento; gli esempi, tipici del ragionamento nyaya ed invisi invece a quello aristotelico o megarico – stoico, appaiono non solo per giustificare il passaggio 3, ma anche 1 e 2. Questo dà sicurezza a Pitto e lo fa procedere verso una corretta impostazione della propria buona argomentazione.

6. Conclusioni

Lo scopo di questo lavoro è solo quello di mostrare come il comportamento dimostrativo o, più in generale, argomentativo di studenti abbastanza evoluti non sia sempre e solo legato alle tipologie aristotelica e megarico – stoica, come la storia e la tradizione spingono a credere.

L'uso di uno schema quanto meno analogo a quello nyaya seguito da questi allievi non significa che essi non facciano una dimostrazione, ma solo che essi non la fanno seguendo uno schema aristotelico; alcuni di essi fanno davvero una dimostrazione (Pitto), altri non del tutto (Filippo), ma quel che interessa rilevare è l'esistenza comune dei passi 1 e 2 che danno senso all'enunciato generale quantificato (tesi).

Ci si potrebbe chiedere se il ruolo di tali passi 1 e 2 presso gli studenti è davvero lo stesso che aveva nella nyaya o se si tratta solo di "ancoraggi" agli esempi, dunque un'applicazione dell'enunciato generale a casi specifici. Ora che abbiamo evidenziato questo modello logico per interpretare un comportamento che troppo sbrigativamente potrebbe essere considerato errato (perché non aderente ad un altro modello più accreditato), potremo spingerci oltre nell'analisi.

Per ora possiamo limitarci a delle riflessioni, quelle seguenti, che sembrano avere qualche interesse didattico.

Questo studio mostra almeno una cosa, che l'aderenza alla logica aristotelica come modello della dimostrazione naturale, non è così scontata e, comunque, non è unica. Qui non si vuole affatto sostituire l'una logica con l'altra, ma aprire l'analisi dell'apprendimento della dimostrazione anche ad altri schemi possibili.

Infatti, condividiamo l'idea generale di Luis Radford (Radford, 1999, 2004) secondo la quale la forma del pensiero di una cultura deve pagare un tributo alle attività che effettuano coloro che ne fanno parte, dato che è l'attività umana che genera i saperi. Piuttosto che porre una logica a modello del funzionamento del pensiero umano, è preferibile analizzare le attività socioculturali e vedere come questo pensiero si forma in quanto riflessione di quel che fanno gli individui nel corso delle proprie attività.

Scendendo in un'analisi più squisitamente metodologica tratta dai casi evidenziati dai soggetti studiati, i passaggi da più casi particolari alla quantificazione universale si presenta come interpretazione esagerata e comunque essa non è spontanea come attività del soggetto. Quando Filippo, per esempio, parla di "questi due", egli fa certamente riferimento a due casi particolari e la generalizzazione che noi vediamo nelle sue parole probabilmente gli deriva da un'attività di analisi dei casi e non da un processo di generalizzazione. Ma proprio

questo fatto rafforza l'idea di un'aderenza pragmatica più alla logica nyaya che a quella predicativa del I ordine.
Infine, in termini semiotici, ci sono passaggi a livello della denotazione (comuni ai comportamenti di tutti i soggetti esaminati) che i soggetti stessi non hanno preso in esame in modo esplicito, tanto che il fatto di formulare affermazioni nella logica predicativa con quantificatori potrebbe avvenire a loro stessa insaputa. Questo tipo di riflessione richiede ulteriori studi, per esempio coinvolgendo gli studenti nell'analisi della loro stessa strategia dimostrativa.

Da un punto di vista didattico, da un lato riceviamo la spinta a ridimensionare l'idea che l'unico modello dimostrativo sia quello enunciativo – predicativo aristotelico, dall'altro a fornire strumenti per un'analisi delle attività socioculturali compartite in aula.
Di tutto ciò non si può non tener conto nell'azione didattica, quando lo scopo è il controllo delle competenze argomentative e dimostrative raggiunte dagli studenti nel corso della scuola superiore.

Bibliografia

Balacheff N. (2004). The researcher epistemology: a deadlock for educational research on proof. *Les cahiers du Laboratoire Leibniz*. 109. http://www-leibniz.imag.fr/LesCahiers.

D'Amore B., Matteuzzi M. (1976). *Gli interessi matematici*. Venezia: Marsilio.

D'Amore B. (1999). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 247-276.

D'Amore B. (2001). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

Durand-Guerrier V. (1999). L'élève, le professeur et le labyrinthe. *Petit X*. 50, 57-79.

Durand-Guerrier V., Arsac G. (2003). Méthodes de raisonnement et leur modélisations logiques. Spécificité de l'Analyse. Quelles implications didactiques? *Recherches en Didactique des Mathématiques*. 23, 3, 295-342.

Duval R. (1991). Structure du raisonnement deductif et apprentissage de la demontration. *Educational studies in mathematics*. 14, 385-414. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 1, 1996, 4-32].

Duval R. (1992-93). Argumenter, demontrer, expliquer: continuité ou rupture cognitive? *Petit x*. 31, 37-61. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica*, 2, 1996, 130-152; appare anche come primo volume nella collana Bologna-Quéretaro, Bologna: Pitagora].

Duval R., Egret M.A. (1993). Introduction à la démonstration et apprentissage du raisonnement déductif. *Repère*. 12, 114-140.

Hanna G., Janke N. (1996). Proof and proving. In: Bishop A. et al. (eds.) (1996). *International handbook of mathematics education*. (877-908). Dordrecht: Kluwer.

Needham J. (1959). *Science and Civilisation in China*. Volume 3. Cambridge: Cambridge University Press.

Pascal B. (1985). *De l'Esprit Géométrique*. A cura di A. Clair. Paris: Flammarion.

Radford L. (1999). La razón desnaturalizada. Ensayo de epistemología antropológica. *Relime*. 2, 3, 47-68.

Radford L. (2004). The Anthropology of meaning. *Educational Studies in Mathematics*. In corso di stampa.

Sarma V.V.S. (2005). Indian Systems of Logic (*Nyaya*): a survey. IIT Bombay Logic Conference. VVSSarma_Tutorial.pdf.

Sarukkai S. (2005). Indian logic and philosophy of science: the logic-epistemology link. SundarSarukkay_PlenaryTalk.pdf.

L'autore ringrazia i colleghi ed amici Giorgio Bagni, Colette Laborde, David Pimm Luis Radford per la lettura critica fatta a precedenti versioni di questo articolo e per i suggerimenti forniti.

Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

con la collaborazione di:
Gianfranco Arrigo, Lorella Campolucci, Giampiero Ceccherini, Erminia Dal Corso, Margherita Francini, Maura Iori, Ines Marazzani, Annarita Monaco, Fabrizio Monari, Paola Nannicini, George Santi, Silvia Sbaragli, Anna Traverso, Nadia Vecchi

NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
ASP – Alta Scuola Pedagogica - Locarno
MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas – Bogotà

Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca 60% dell'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica): «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*».

Pubblicato in: D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.

Summary. *In this paper we examine teachers' and students' convictions connected with the relations that exist between area and perimeter of a plane figure. The research joins, with many new features, a classic mainstream that has been explored a lot for over 60 years. In particular we examine the change of convictions, the language used to express it, the degree of incidence of the examples we provide; we discuss an idea according to which just the supposed relations between area and perimeter are an example of the student's behaviour that leads him to confirm without criticism majorizations and minorizations between entities that are put in relationship.*

Sunto. *In questa ricerca si esaminano le convinzioni di insegnanti e studenti a proposito delle relazioni esistenti tra perimetro ed area di una figura piana. La ricerca si inserisce in un classico filone, molto esplorato da oltre 60 anni, ma con molti fattori di novità. In particolare, si esamina la modifica delle convinzioni, il linguaggio usato per esprimerla, il grado di incidenza che hanno gli esempi forniti; si discute un'idea secondo la quale proprio le*

supposte relazioni tra perimetro ed area sono un esempio di comportamento in base al quale lo studente tende acriticamente a confermare maggiorazioni o minorazioni tra entità poste in relazione.

1. Premessa e quadro teorico

Le riflessioni critiche sul problema dell'apprendimento dei concetti di perimetro ed area delle figure piane possono vantare il fatto di essere state tra le prime ad essere studiate. Dopo essersi occupato della nascita del pensiero e del linguaggio nel bambino, poi dell'acquisizione – costruzione dell'idea di numero (nelle sue varie accezioni), Piaget si occupò, a partire dagli anni '30 del XX secolo, delle costruzioni concettuali aventi a che fare con la Geometria. Tra le varie opere che sarebbe qui possibile citare, ci limitiamo a quelle nelle quali appaiono esplicitamente perimetro ed area o riferimenti a tali concetti (Piaget, 1926; Piaget, 1937; Piaget, Inhelder, Szeminska, 1948; Piaget, Inhelder, 1962). A queste opere di base, fecero rapidamente seguito, negli anni '50 e '60, studi di allievi o seguaci del caposcuola ginevrino, basate sulle stesse certezze tratte dall'epistemologia genetica, per esempio Vihn et al. (1964), Vihn, Lunzer (1965). Segnaliamo anche lo studio di Battro (1969) che ripete tutti i celebri esperimenti del Maestro.
Sono, questi, gli studi classici che hanno condizionato per oltre 20 anni le successive analisi su tale tema; essi erano basati soprattutto sugli insuccessi dei giovani allievi a determinati stadi – età. In particolare, in questo filone si sono studiate le idee di lunghezza e di area, fra le altre, con molta attenzione, mettendo in evidenza la grande difficoltà da parte degli allievi di appropriarsi dell'idea di superficie. Ancor più in particolare, le ricerche misero in evidenza come, al variare della forma, lo studente giovane tenda a non essere capace di accettare l'invarianza della misura superficiale. Le difficoltà legate a false relazioni tra area e perimetro sembrano perdurare fino ai 12 anni, secondo queste ricerche, e sono assai poco connesse con lo sviluppo linguistico del soggetto.
[È ben noto che le conclusioni di Piaget furono sottoposte a severa critica da parte degli studiosi successivi; per non appesantire troppo il lavoro, rimandiamo solo a Resnick, Ford (1981, soprattutto il cap. 7)].
A questi studi preliminari e classici fecero seguito numerosissime altre ricerche, tanto che è impossibile fare ora qui un quadro completo; ci limiteremo (seguendo un percorso cronologico) solo a quelle che, in qualche modo, fanno riferimento alla difficoltà di apprendimento specifico delle idee di perimetro ed area; esse hanno senza dubbio condizionato l'indirizzo della nostra attuale ricerca.

In Rogalski (1979) si segnala che uno dei grandi problemi dell'apprendimento delle superfici sta nel fatto che esistono specifici ostacoli concettuali che si rafforzano l'un l'altro. Le difficoltà salienti sono le seguenti: i cambi di dimensione, lo specifico statuto delle unità di misura, le loro relazioni con le unità di lunghezza e le misure spaziali.
In Gentner (1983), pur con molte cautele, si suggerisce l'uso di modelli semplici per i primi approcci alla geometria in generale, allo studio delle superfici in particolare.
L'idea di modello intuitivo è molto ben spiegata in Fischbein (1985): «Per creare un supporto intuitivo alla ricerca intellettuale, ai concetti e alle operazioni mentali tendiamo ad associare spontaneamente modelli significativi dal punto di vista intuitivo (…) *Un modello intuitivo ha sempre un significato pittorico - comportamentale e induce sempre effetti di accettazione immediata*. (…)» (pagg. 14-15); ma: «L'insistere eccessivamente nel fornire suggerimenti intuitivi usando rappresentazioni artificiali e troppo elaborate può fare più male che bene» (pag. 18).
Un discorso assai più generale viene proposto in Speranza (1987); insieme a considerazioni generali di straordinario interesse culturale, si dimostra come le difficoltà concettuali rilevate nella scuola primaria su questioni connesse con area e perimetro permangano anche tra allievi evoluti, anche fino all'università. [Vedremo quanto questo sia vero, anche grazie alla presente ricerca].
Interessante la riflessione proposta in Iacomella, Marchini (1990) in cui si evidenzia come vi sia un contrasto tra le misure dirette (es. con geopiani, quadrettature, teorema di Pick) e indirette (es. tramite il ricorso alle formule, facendo appello a misure lineari) di una superficie e come questo contrasto possa costituire un ostacolo alla comprensione.
In Outhred, Mitchelmore (1992) si presentano casi di bambini di fine scuola primaria in grado di eseguire confronti tra le superfici di figure rettangolari, ma non in grado di passare da questa esperienza alle misure superficiali. In generale, l'articolo è dedicato a specifiche difficoltà di concettualizzazione di area e perimetro da parte degli allievi della primaria.
Un ampio studio, da molti ricercatori considerato oramai un classico, è quello di Rouche (1992); in esso si dimostra come il rettangolo costituisca il punto di partenza più importante per l'acquisizione del concetto di superficie, il punto cruciale, la figura campione, dato che ad esso si riducono quasi tutte le altre figure che l'allievo conoscerà nella scuola primaria e certamente le prime (triangolo,

parallelogrammo, trapezio, …). Si insiste anche sul fatto che la determinazione dell'area di un rettangolo come prodotto delle misure di due segmenti sia un esempio di misura indiretta, difficile da accettare e da costruire concettualmente.
Di rilievo ci pare la ricerca di Giovannoni (1996) dove si discutono e si ripetono celebri esperimenti di Piaget sul problema della comprensione del concetto di superficie presso bambini di 3-6 anni; si dimostra con vigore che tale concetto non è *di per sé* al di fuori della portata dei bambini, come si è ritenuto in passato, ma che questa conquista dipende dalle condizioni al contorno, soprattutto riferite al linguaggio ed alla proposta di modelli adeguati specifici (fogli verdi interpretati come tali e non fogli verdi interpretati come pascoli; area superficiale interpretata come tale e non come erba da pascolo per mucche). Dunque, il possesso di un linguaggio specifico ha profonde incidenze sulla costruzione di tale concetto: l'uso di un ambiguo aggettivo "grande" viene sostituito lentamente e consapevolmente da "esteso", comportando un notevole successo apprenditivo anche presso soggetti di 5 anni.
In Marchini (1999) si parla del conflitto tra i due concetti e del modo didattico di affrontare l'argomento per venirne a capo; l'articolo contiene molte considerazioni di grande pregio e di ampio respiro non solo didattico, ma pure matematico ed epistemologico.
In Medici (1999) si discute sulla questione della formulazione linguistica degli enunciati dei problemi di geometria, se cioè sia necessario far ricorso ad un linguaggio semmai meno preciso ma più accessibile e che non faccia uso eccessivo di formule.
Altro studio di interesse è quello di Jaquet (2000), nel quale si presenta e si discute molto approfonditamente un problema proposto ad allievi di III e IV primaria, nel corso del *Rally matematico transalpino* nei mesi di gennaio e febbraio 2000; in tale problema, originale nella sua formulazione, si tratta di valutare un confronto tra aree di figure non standard, delle quali non sono fornite misure superficiali né lineari. Si studiano gli approcci di molti soggetti esaminati, mostrando la complessità dei processi messi in campo dagli allievi, i quali mescolano metodi diretti ed indiretti, valutando aree e perimetri dei poligoni che appaiono nel disegno. Si tratta di uno studio interessante che dimostra la complessità del rapporto tra i due concetti.
Un lavoro che abbiamo seguito da vicino anche nel suo sviluppo è quello di Chamorro (1997); l'Autrice vi analizza 8 aspetti distinti che determinano gli intorni di apprendimento per quanto concerne la misura (in generale), in accordo con le idee di Guy Brousseau; essi

sono: oggetto supporto, grandezza, valore particolare (o quantità di grandezza), applicazione misura, misura immagine, misura concreta, misurazione, ordine di grandezza. L'interessante ricerca della Chamorro riguarda la misura in generale e dimostra la complessità di tale tema, specie per quanto concerne il suo apprendimento. Tra gli esempi specifici che vengono fatti, appaiono proprio perimetro e superficie: «Nella superficie, in quanto misura prodotto, concorrono molteplici ostacoli concettuali. Tra questi, c'è la relazione che le unità di superficie mantengono con le unità di lunghezza, essendo le prime sussidiarie alle seconde come prodotto di misure. Tali relazioni possono essere comprese solo a partire da relazioni spaziali che a loro volta devono essere coordinate con relazioni moltiplicative. La coordinazione tra la linearità di ciascuna delle dimensioni e la linearità delle superfici deve poter essere garantita attraverso un modello geometrico che aiuti a visualizzare tali relazioni».
Alla tesi di dottorato della Chamorro, fa seguito un lungo articolo che ne è una sintesi ma anche un approfondimento, tanto che l'abbiamo tradotto e pubblicato per intero in italiano: Chamorro (2001-02); qui si fanno analisi di esperienze realizzate nella scuola primaria a proposito del problema dell'insegnamento – apprendimento della misura ed in modo specifico di perimetro ed area; lo scopo di questo studio è di contribuire alla realizzazione di sapienti situazioni a-didattiche ed ingegnerie tese ad eliminare o almeno a contenere le ben note difficoltà di apprendimento.

Come si vede, il quadro scientifico di riferimento, pur nelle limitazioni di contenuto che ci siamo posti, è di straordinaria complessità ed ampiezza.

2. Problemi di ricerca

È evidente dunque che i due concetti geometrici: *perimetro* / *area di una figura piana*, hanno molti elementi comuni sul piano scientifico, ma anche molti altri che sono semplicemente supposti sul piano delle misconcezioni, assai diffuse tra gli studenti di ogni livello scolastico.
Per esempio, la letteratura ha ampiamente mostrato come molti studenti di ogni età siano convinti che vi sia una relazione di dipendenza stretta tra i due concetti sul piano relazionale, del tipo:
se A e B sono due figure piane, allora:

- se (perimetro di A > perimetro di B) allora (area di A > area di B)
- idem con <
- idem con = (per cui: due figure isoperimetriche sono necessariamente equiestese);

- e viceversa, scambiando l'ordine "perimetro – area" con "area – perimetro".

Difficilmente questo tema viene preso in esame didatticamente in modo esplicito, anche per una supposta difficoltà, secondo gli insegnanti.
Ci si potrebbe allora chiedere se presso gli insegnanti, a qualsiasi livello scolastico, vi sia piena consapevolezza sul tema o se, per caso, anche presso alcuni insegnanti vi siano problemi di costruzione concettuale. Ciò evidentemente riguarda il problema delle convinzioni e delle concezioni degli insegnanti.[4] Un ampio quadro teorico su questo tema si può trovare in D'Amore, Fandiño Pinilla (2004), il che ci esime dal ripeterlo qui.

Gioca inoltre un altro fattore, evidenziato da Azhari (1998); cercheremo di dirlo in modo rapido: se vi sono due relazioni con qualche mutuo legame reciproco, lo studente tenta di applicare la seguente "legge di conservazione":

- se la tal cosa cresce, anche quest'altra ad essa relazionata cresce (e viceversa).

Ora, l'esempio che lega tra loro perimetro ed area sembra calzare a pennello per le considerazioni di Azhari (1998) (anzi, questo è proprio uno degli esempi offerti in questo lavoro, citato da Stavy, Tirosh, 2001).

Se mettiamo in relazione i perimetri di due figure A e B, con le loro rispettive aree, ci sembra che un modo convincente per evidenziare che le "leggi" di cui sopra NON valgano, sia di:
mostrare un esempio per ciascuno dei seguenti 9 possibili casi:

---

[4] Reputiamo di un certo interesse dichiarare esplicitamente che ci serviremo delle seguenti interpretazioni di tali termini (proposte anche in apertura di: D'Amore, Fandiño Pinilla, 2004), peraltro sempre più diffuse e condivise:

- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T.

Spesso, in luogo di "concezione di A relativamente a T" si parla di "immagine che A ha di T".

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

La prima casella > > dice:

- trovare due figure tali che, passando dalla prima alla seconda, il perimetro cresca e l’area cresca

e così via.
Per evitare difficoltà, si può partire sempre da figure molto semplici, come un rettangolo, quando è possibile, compiendo le varie trasformazioni su di esso o su figure da esso derivate. Ci sembra necessario far sì che le figure da trattare siano le più elementari possibili per evitare complicazioni dovute alla figura stessa.

Nell’Appendice si danno i 9 esempi di cui sopra in casi estremamente elementari. Questi esempi non vengono mai forniti preliminarmente ai soggetti sottoposti alla prova che verrà descritta in seguito; ciascuno dei soggetti dovrebbe provvedere da sé stesso a trovare esempi opportuni, almeno in prima istanza.

3. Domande, metodologia della ricerca ed ipotesi di risposta[5]

Ad un gruppo di *collaboratori*, docenti di scuola primaria, di scuola media, di scuola superiore e di università, abbiamo proposto di farsi carico della ricerca qui sopra descritta, dando le seguenti indicazioni che sono, all’un tempo, le domande esplicite della ricerca, le relative indicazioni metodologiche e le nostre ipotesi di risposta, suddivise in 3 punti.

PUNTO 1.
PROBLEMA di ricerca R1: Abbiamo chiesto a tutti i collaboratori di mettere alla prova loro stessi, in tutta sincerità, ed alcuni loro colleghi delle scuole primarie, medie, superiori, nonché studenti universitari in formazione di insegnante.
DOMANDA di ricerca D1: È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all’aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l’area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose NON stanno così?

---

[5] Contrariamente alle nostre abitudini, in questo lavoro non separiamo questi tre punti perché essi sono questa volta profondamente legati tra loro.

IPOTESI di risposta I1: Ritenevamo che non solo presso molti studenti, ma anche presso alcuni insegnanti vi fossero misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane. Che non fosse così banale trovare i 9 esempi detti (specialmente nel caso in cui il perimetro deve diminuire e la superficie aumentare). Che anche dopo aver visto gli esempi, vi fosse qualche resistenza. Quali indicatori di tali misconcezioni radicate abbiamo pensato di assumere le dichiarazioni stesse dei collaboratori.

PUNTO 2.

PROBLEMA di ricerca R2: Abbiamo chiesto a tutti i collaboratori di far fare delle prove a studenti di scuola primaria, media, superiore ed a studenti universitari. Ciascuno di essi era invitato ad introdurre un discorso qualsiasi su perimetro ed area di figure piane semplici e provare a far eseguire delle trasformazioni, verificando se gli studenti

- accettano spontaneamente
- accettano di buon grado dopo un esempio
- accettano con difficoltà dopo vari esempi
- …
- rifiutano senza discussione
- rifiutano anche dopo esempi
- …

che possono valere tutte e 9 le relazioni e cioè che NULLA si possa dire a priori del legame tra "aumento (uguaglianza, diminuzione) del perimetro" ed "aumento (uguaglianza, diminuzione) dell'area di figure piane".

A noi interessava rilevare due cose:

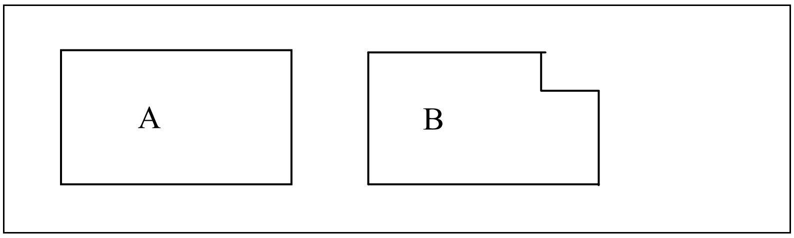
a) il *mutamento delle convinzioni*; se cioè, dopo alcuni esempi, gli studenti sono disposti a cambiare idea e se su questo incide l'età; diventava così essenziale far esprimere le convinzioni dei soggetti *prima* e *dopo* gli esempi; per raggiungere questo scopo, più che fare dei test, diventava essenziale intervistare i soggetti in piccoli gruppi (2-3 per gruppo) o singolarmente;

b) il linguaggio che usano gli studenti per spiegare il loro pensiero, prima e dopo: esempi, discorsi generali, frasi,…, uso di disegni, di schemi,…

DOMANDA di ricerca D2: Con quanta naturalezza e spontaneità gli studenti riescono ad accettare che non esistono relazioni obbligate tra perimetro ed area delle figure piane? Come varia questa accettazione con l'età? Risulta facile accettare i 9 esempi? Come esprimono le loro convinzioni al proposito? Che tipo di linguaggio usano?

IPOTESI di risposta I2: Ritenevamo che gli studenti, di qualsiasi età, esprimessero una grande difficoltà ad accettare quel che sembra anti - intuitivo. Che con il crescere dell'età, questa accettazione aumentasse nettamente. Che i soggetti trovassero qualche difficoltà ad accettare gli esempi. Che avrebbero espresso le loro convinzioni in maniera assai poco accademica, dato che esse contrastano con le convinzioni costruite scolasticamente. Che il linguaggio usato avrebbe teso ad essere il più possibile colloquiale, forse con l'uso spontaneo di grafici e disegni schematici.

PUNTO 3.
PROBLEMA DI RICERCA R3: Abbiamo invitato i collaboratori a sottoporre a studenti diversi, che non erano stati sottoposti alla prova precedente, la seguente, durante interviste singole.
Essi dovevano consegnare a tali nuovi soggetti una scheda contenente le due figure seguenti:



(L'esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra).
Ora, a metà degli studenti andavano poste le due seguenti domande:
d1: La superficie di A è minore, uguale o maggiore della superficie di B?
E il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?
All'altra metà, invece, si dovevano porre le due seguenti domande:
d2: Il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?
E l'area di A è minore, uguale o maggiore dell'area di B?
DOMANDA di ricerca D3: Può l'ordine invertito delle domande che caratterizza d1 e d2 modificare radicalmente le risposte degli studenti?
IPOTESI di risposta I3: La nostra ipotesi era che:
- in d1 gli studenti avrebbero verificato facilmente che l'area di A è maggiore di quella di B (perché ciò appare graficamente molto evidente) e avrebbero allora teso a dire, senza verifiche, che il perimetro di A è maggiore del perimetro di B; i collaboratori dovevano solo verificare se questa tendenza esisteva davvero;

- in d2 gli studenti sarebbero stati imbarazzati dalla prima domanda sul perimetro, che avrebbero dovuto verificare con attenzione perché NON è immediatamente evidente; una volta verificato che il perimetro di A è uguale a quello di B, tuttavia, non avrebbero dovuto avere problemi a dire che l'area di A è maggiore di quella di B; i collaboratori dovevano far sì che lo studente verificasse che i due perimetri sono uguali e lo dicesse, dopo di che stare attenti a che cosa avrebbero risposto spontaneamente a proposito delle aree.

Se le cose avessero funzionato davvero così, avremmo contraddetto l'ipotesi di Azhari (1998) (citata ed almeno parzialmente fatta propria da Stavy e Tirosh, 2001) in base all'evidenza delle figure; non varrebbe allora più la loro supposta "legge di conservazione", ma tutto si ricondurrebbe ad un fatto legato a misconcezioni ed evidenze percettive.

In totale abbiamo avuto 14 *collaboratori*:
n° 7 docenti della scuola primaria
n° 2 docenti della scuola media
n° 3 docenti della scuola superiore
n° 2 docenti dell'università (o equivalente).

Ciascuno di essi ha messo alla prova sé stesso ed alcuni colleghi; in totale, i numeri di *insegnanti* sottoposti alla prova sono stati:
n° 26 della scuola primaria
n° 16 della scuola media
n° 13 della scuola superiore
n° 2 docenti dell'università,
per un totale di 57 insegnanti.

I numeri degli *studenti* sottoposti alla prova 2 sono stati i seguenti:
n° 29 della scuola primaria (tutti di V)
n° 20 della scuola media (6 di I e 14 di III)
n° 21 della scuola superiore (8 del biennio di Liceo Scientifico, 9 di IV o V di Liceo Scientifico, 4 di Istituto Professionale)
n° 13 dell'Università o analoghi (4 del corso di laurea in Scienza della Formazione, 1 del III anno del corso di laurea in Matematica, 8 dell'Alta Scuola Pedagogica)
per un totale di 83 studenti.

I numeri degli *studenti* sottoposti alla prova 3 sono stati i seguenti:
n° 50 della scuola primaria (tutti di V)

n° 26 della scuola media (12 di I e 14 di III)
n° 14 della scuola superiore (4 del I biennio del Liceo Scientifico, 5 dell'Istituto Professionale, 5 di III, IV o V Liceo Scientifico)
n° 17 dell'università o simili (4 del corso di laurea in Scienza della Formazione, 12 dell'Alta Scuola Pedagogica, 1 del III anno del corso di laurea in Filosofia)
per un totale di 107 studenti.

Ricordiamo che tutte le prove sono state effettuate sotto forma di intervista.

4. Risultati della ricerca, discussione dei risultati e risposte alle domande di ricerca

4.1. Insegnanti alla prova su perimetro e area

4.1.1.

Per quanto riguarda il punto 1., problema di ricerca R1, abbiamo fatto una distinzione tra le due consegne:

- abbiamo chiesto a tutti i collaboratori di mettere alla prova loro stessi, in tutta sincerità,

ed

- alcuni colleghi delle scuole primarie, medie, superiori, nonché studenti universitari di corsi (di specializzazione in Italia e di master in Svizzera) per la formazione degli insegnanti di scuola secondaria (inferiore o superiore).

In entrambi i casi le domande di ricerca D1 erano le seguenti: È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all'aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l'area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose NON stanno così?,
mentre le nostre ipotesi di risposta I1 erano: Ritenevamo che presso alcuni insegnanti vi fossero misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane. Che non fosse così banale trovare i 9 esempi detti [specialmente nel caso (p<, S>) in cui il perimetro deve diminuire e la superficie aumentare]. Che anche dopo aver visto gli esempi, vi fosse qualche resistenza.

In questo paragrafo **4.1.1.** esamineremo il caso in cui i soggetti sottoposti alla (auto)prova erano gli stessi nostri collaboratori alla ricerca, mentre rimandiamo al paragrafo **4.1.2.** il caso in cui i soggetti sottoposti alla prova erano colleghi dei collaboratori alla ricerca o studenti universitari.

Dai 14 collaboratori alla ricerca abbiamo reazioni piuttosto simili per quanto concerne la modalità di risposta:

- 1 soggetto (docente di università) si limita a compiere un'analisi esclusivamente matematica della questione, ovviamente corretta, non rispondendo alla domanda personale sulle proprie difficoltà;
- 13 scrivono testi che vanno da 1 a 6 pagine in risposta, a volte piuttosto ricche di riferimenti alle proprie difficoltà:
    - 9 collaboratori (7 insegnanti di primaria, 1 di superiore, 1 di università) confessano la propria difficoltà al momento di dover dare una forma alla propria idea, anche se corretta e consapevole; ammettono anche che hanno dovuto compiere uno sforzo per immaginare tutte le 9 situazioni;
    - 4 collaboratori (2 insegnanti di media, 2 di superiore) dichiarano di non aver avuto alcun problema a trovare subito le risposte e dichiarano soprattutto la loro piena consapevolezza che le cose dovessero funzionare così.

[4 collaboratori (2 di primaria, 2 di media) fanno ampio riferimento ai propri allievi, non riuscendo a rispondere in prima persona solo come soggetti, ma interpretando la nostra domanda come un implicito invito a pensare ad una situazione d'aula].

Il caso dichiarato quasi unanimemente il più complesso è proprio quello (p<, S>) che avevamo supposto ed il suo analogo (p>, S<).

Le nostre ipotesi I1 sono dunque ampiamente confermate: perfino presso persone di alto livello culturale, quali sono i nostri collaboratori, vi sono, almeno di primo acchito, misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane. Come indicatori di tali misconcezioni avevamo deciso di assumere o le loro stesse ammissioni esplicite, o la prova evidente delle loro difficoltà. Per molti, non è stato così banale trovare i 9 esempi detti [specialmente nei casi (p<, S>) e (un po' meno) (p>, S<)], per esplicita ammissione. Uno dei collaboratori dichiara esplicitamente per iscritto: «(…) Ho avuto maggiori difficoltà a trovare figure nei casi dove il perimetro deve diminuire e l'area deve rimanere uguale o crescere», frase che prendiamo come prototipo per molte altre dello stesso tenore.

Si vede bene come le autodichiarazioni di difficoltà si addensino tra gli insegnanti dei primi livelli scolastici, forse a causa della minor preparazione tecnica (da più d'uno denunciata; molti collaboratori insegnanti di primaria confessano di aver appreso a trattare criticamente di queste questioni nell'àmbito dei corsi organizzati dal NRD di Bologna).

La scelta delle figure per i 9 casi si addensa, almeno all'inizio, attorno a poligoni convessi ed in particolare rettangoli.

Uno dei collaboratori dichiara di aver messo alla prova alcuni propri familiari
- quelli impegnati in attività edili, quotidianamente di fronte a situazioni concrete nelle quali i casi (p>, S<) e (p<, S>) sono ricorrenti, non hanno avuto problemi non solo a rispondere correttamente, ma anche a fornire esempi;
- altri, impegnati in attività più di routine, hanno mostrato di tendere a dare le classiche risposte attese: esistono solo i casi (p>, S>), (p<, S<), (p=, S=); gli altri casi sono ritenuti impossibili; per esempio, non è ritenuto possibile trovare esempi per il caso (p<, S>).

4.1.2.
Gli 43 insegnanti intervistati (19 di scuola primaria, 8 di scuola media, 10 di scuola superiore, 6 in formazione post laurea come insegnanti di scuola secondaria inferiore) hanno comportamenti molto dissimili, ma anche parecchie reazioni in comune; i protocolli delle interviste sono a disposizione, qui coglieremo solo l'essenziale. Riporteremo tra «» le frasi che confermano le nostre affermazioni e che ci sembrano più rappresentative.

Una reazione molto diffusa, a tutti i livelli scolastici, è la differenza manifestata a livello intuitivo, al primo contatto con il problema, rispetto al cambio (a volte forte) tra la prima risposta intuitiva e la convinzione acquisita alla fine della prova.

Quasi ogni intervista iniziava con il cosiddetto "problema di Galileo": «Un paese ha due piazze A e B; il perimetro della piazza A è maggiore del perimetro della piazza B; quale delle due piazze ha area maggiore?».

Moltissimi degli intervistati, decisamente la grande maggioranza, 40 su 43, anche laureati, anche insegnanti di scuola superiore, affermano che ha area maggiore la piazza che ha perimetro maggiore, salvo poi:

- correggersi spontaneamente, affermando che "non è detto", ancor prima di effettuare tutte le prove previste nell'intervista (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti di scuola superiore)

oppure

- accettare che la propria risposta fosse criticabile e scorretta, ma solo dopo aver eseguito le prove (e qui si nota un maggior addensamento tra gli insegnanti dei primi livelli scolastici).

Dunque, il *cambio di convinzione* è palese, a volte forte, ed in parecchi casi richiede prove e riflessione non banali.

Alla domande:
«È vero o non è vero che si possono trovare esempi per tutti e 9 i casi? È vero o non è vero che viene spontaneo pensare che all'aumentare del perimetro di una figura piana, ne aumenti l'area, in generale? È vero o non è vero che bisogna fare uno sforzo, per *convincersi* che le cose non stanno così?»,
molti dei docenti, e NON necessariamente della sola scuola primaria, cominciano con il rispondere di no, alla prima, il che rivela che le misconcezioni radicate a proposito di supposte relazioni necessarie tra perimetri ed aree delle figure piane non risiedono solo presso *alcuni* insegnanti, come noi ritenevamo, ma presso la maggior parte.

Per molti intervistati non è stato affatto banale trovare i 9 esempi detti [specialmente nel caso (p<, S>) o viceversa). Abbiamo avuto parecchi casi di insegnanti (anche di scuola superiore e di scuola media) che hanno avuto bisogno di ricorrere agli (o ad alcuni degli) esempi forniti dall'intervistatore. [Molti hanno notato la simmetria delle richieste; e qualcuno ha manifestato insofferenza nel caso =, = per non voler semplicemente applicare una isometria o lasciare le figure identiche].

Quel che si evince, però, è che, dopo aver visto gli esempi, o creati dall'intervistato stesso o proposti dall'intervistatore, sono (quasi) del tutto scomparse le persistenze delle misconcezioni legate all'intuizione; si arriva a frasi piene di consapevolezza, come la seguente:
«Dunque, due figure equiestese non sono automaticamente anche isoperimetriche» [questa perfetta enunciazione, viene fatta con evidente sorpresa da una insegnante di scuola primaria che dichiara di

aver lottato parecchio con sé stessa per trovare i 9 esempi, bloccata dalla propria convinzione a tal proposito, una misconcezione radicata della quale prima non si era mai resa conto, che all'aumentare del perimetro fosse necessario che aumentasse anche l'area].

Appare molto chiaro che le misconcezioni rivelate siano dovute al fatto che quasi tutti i modelli figurali che accompagnano queste questioni sono realizzati con figure piane convesse piuttosto usuali, il che spinge a credere che si possa affrontare il problema SOLO con tali figure. Anzi, questa considerazione è confermata da più d'uno degli stessi intervistati: «È possibile partendo da un quadrato; non è possibile partendo da un cerchio» (in altre parole, il quadrato è considerato figura ammissibile per trasformazioni come quelle proposte a noi, il cerchio no); alla proposta di una figura concava: «Ma questa non è una figura geometrica» [intende dire: non di quelle usualmente utilizzate nella pratica didattica quando si parla di area e perimetro]; altri considerano possibili solo omotetie, per cui: «…ma con i quadrati è impossibile» dato che l'omotetico di un quadrato è ancora un quadrato.

Molto ricorrente è il rinvio che gli insegnanti intervistati fanno ai propri allievi; molte delle domande e delle risposte vengono infatti "filtrate" attraverso l'esperienza con o dei propri allievi: «Anche loro non lo vedono» [quel che io non ho visto]; «…fanno fatica ad immaginarlo»; «Bisogna cambiare molto le figure» [cioè passare da figure standard ad altre, per esempio concave; in realtà, non ce ne sarebbe sempre bisogno, ma gli esempi forniti dagli intervistatori (ved. Appendice) vengono spesso considerati come unici].

Interessante il fatto che alcuni insegnanti delle scuole secondarie (inferiori e superiori) considerano che questo tipo di questione sia più vicina al mondo della scuola primaria, «perché lì si lavora sulle figure, più sul concreto, meno in astratto», quasi a giustificare il proprio fallimento (e quello potenziale dei propri allievi) nel compito. Naturalmente, in questo c'è molto di vero; nella scuola primaria, troppo stesso, vengono trasformate in modelli radicati delle immagini che dovrebbero restare solo parziali; spesso non c'è neppure consapevolezza del problema.

Vedremo nei prossimi paragrafi **4.2.1.** e **4.2.2.** l'andamento della ricerca con gli studenti ed azzardiamo qui l'ipotesi, che analizzeremo criticamente in **5.**, che l'ostacolo che parrà evidente rispetto alla costruzione di una conoscenza matematicamente soddisfacente sulle

relazioni tra “perimetro e area” non sia solo di natura epistemologica bensì assai più di natura didattica.
La natura epistemologica è evidente ed ha molteplici aspetti:
a) non è un caso che storielle e leggende che legano area e perimetro siano antichissime e si ripetono nel tempo, anche a distanza di secoli (basti pensare al mito della fondazione di Cartagine da parte di Didone ed al celebre indovinello di Galileo); questo è un segnale di ostacolo epistemologico;
b) per compiere queste analisi si devono operare trasformazioni geometriche sulle figure; ebbene, solo alla fine del XIX secolo queste trasformazioni, la loro potenza, la loro necessità, si sono rivelate completamente agli occhi dei matematici; per millenni ha dominato la staticità degli *Elementi* di Euclide; anche questo ritardo nell’introduzione-accettazione è ovvio segnale di ostacolo epistemologico.
D’altra parte, però, su questi ostacoli epistemologici evidenti si innestano anche ostacoli didattici; se sono servite interviste opportune, piuttosto profonde, per cambiare le convinzioni degli stessi insegnanti, come non pensare che le scelte didattiche che questi utilizzano in aula con i propri allievi non influenzino la formazione di misconcezioni, relativamente a questo strategico tema?

4.2. Studenti alla prova su area e perimetro

4.2.1.
Ricordiamo che al punto 2., come problema di ricerca R2, avevamo chiesto a tutti i collaboratori di intervistare studenti di scuola primaria, media, superiore e studenti universitari. Ciascuno di essi era invitato ad introdurre un discorso qualsiasi su perimetro ed area di figure piane semplici e provare a far eseguire delle trasformazioni, verificando se gli studenti

- accettano spontaneamente
- accettano di buon grado dopo un esempio
- accettano con difficoltà dopo vari esempi
- …
- rifiutano senza discussione
- rifiutano anche dopo esempi
- …

che possono valere tutte e 9 le relazioni e cioè che NULLA si possa dire a priori del legame tra “aumento (uguaglianza, diminuzione) del perimetro” ed “aumento (uguaglianza, diminuzione) dell’area di figure piane”.

A noi interessava rilevare due cose:
a) il *mutamento delle convinzioni*; se cioè, dopo alcuni esempi, gli studenti sono disposti a cambiare idea e se su questo incide l'età; diventava così essenziale far esprimere le convinzioni dei soggetti *prima* e *dopo* gli esempi; per raggiungere questo scopo, più che fare dei test, diventava essenziale intervistare i soggetti in piccoli gruppi (2-3 per gruppo) o singolarmente;
b) il linguaggio che usano gli studenti per spiegare il loro pensiero, prima e dopo: esempi, discorsi generali, frasi,…, uso di disegni, di schemi,…

A questo scopo, le domande di ricerca D2 erano le seguenti:
Con quanta naturalezza e spontaneità gli studenti riescono ad accettare che non esistono relazioni obbligate a priori tra perimetro ed area delle figure piane? Come varia questa accettazione con l'età? Risulta facile accettare i 9 esempi? Come esprimono le loro convinzioni al proposito? Che tipo di linguaggio usano?

Come ipotesi preliminari, ritenevamo che gli studenti, di qualsiasi età, esprimessero una grande difficoltà ad accettare quel che sembra anti - intuitivo. Che con il crescere dell'età, questa accettazione aumentasse nettamente. Che i soggetti trovassero qualche difficoltà ad accettare gli esempi. Che avrebbero espresso le loro convinzioni in maniera assai poco accademica, dato che esse contrastano con le convinzioni costruite scolasticamente. Che il linguaggio usato avrebbe teso ad essere il più possibile colloquiale, forse con l'uso spontaneo di grafici e disegni schematici.

Il risultato più clamoroso della ricerca è legato al fatto che i casi più complessi (p>, S<; viceversa; p>, S=; viceversa) non vengono maggiormente accettati spontaneamente con l'aumento dell'età e neppure del livello scolastico.
Oltre il 90% degli studenti intervistati, indipendentemente dal livello scolastico, tende spontaneamente ad affermare che vi sia una dipendenza stretta tra l'aumento/diminuzione del perimetro e l'aumento/diminuzione dell'area;
messi di fronte al compito di fornire esempi, le difficoltà sono concentrate soprattutto nei casi detti or ora;
solo pochi riescono in questo compito e il risultato positivo non è correlato all'età (dunque al grado scolastico); tra gli studenti universitari si hanno alcuni dei risultati negativi più clamorosi;

una volta mostrato, da parte del ricercatore, che i 9 casi che esauriscono tutte le possibilità sono davvero tutti possibili, si hanno le seguenti reazioni:

- più della metà degli studenti mostra sorpresa dovuta all'uso di figure concave; qualcuno giunge a dichiarare «Che queste non sono figure geometriche», che «Non sono corrette», che «A scuola non si usano»,…; questo atteggiamento non è correlabile in modo significativo all'età e dunque al livello scolastico o al tipo di scuola frequentata;
- più della metà degli studenti capisce il senso della proposta ed ammette di aver subito un cambio di convinzione; anche questo atteggiamento, leggermente superiore ai livelli alti di scolarità, non è però statisticamente legato all'età;
- in casi di non riuscita, spesso lo studente si trincera dietro giustificazioni dovute alla mancanza di svolgimento di questo argomento da parte dell'insegnante; questo fatto è assai più presente nella scuola media; numerosi studenti delle superiori dimostrano di aver ben capito il *senso* della ricerca e rivelano interesse e motivazione nel dare le risposte; alcuni riconoscono la loro propria personale difficoltà nel compiere sulle figure trasformazioni opportune; interessante come alcuni studenti delle superiori si facciano carico personale del problema, senza scaricare sugli insegnanti dei livelli precedenti responsabilità (al contrario, abbiamo avuto insegnanti laureati che hanno incolpato di queste loro manchevolezze e difficoltà gli sudi universitari, nei quali, accusano, questo tipo di argomenti sono ignorati; o i libri di testo, per motivi analoghi).

Tornando al cambio di convinzione, in diversi casi chi lo dichiara lo fa in modo sorpreso, come se esso scardinasse una consapevolezza data per acquisita.

Dei 13 studenti universitari intervistati, uno solo del corso di laurea in Matematica, quelli che dichiarano spontaneamente che i 9 casi sono tutti possibili, indipendentemente dal saperli trovare, sono meno della metà;

degli altri, quelli che hanno bisogno di fare le prove, solo la metà dichiara alla fine in modo convincente di aver cambiato convinzione;

di questi, alcuni lo fanno in modo molto esplicito;

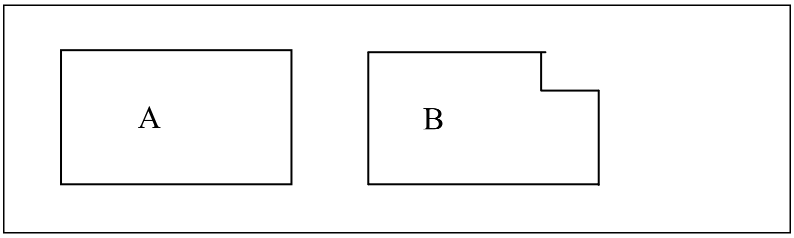
parecchi sostengono che il malinteso di pensare che l'aumento del perimetro comporti l'aumento dell'area derivi da una cattiva didattica e si ripromettono di tenerne conto durante la loro futura professione, anzi iniziando già dall'azione di tirocinio.

Non sempre l'accettazione è facile: «Per me è dura accettarlo, ero convinto che dipendevano, è una bella sorpresa che devo digerire, è dura».

Quanto al linguaggio, enorme il ricorso al linguaggio naturale, a confusioni terminologiche (per esempio, nonostante si parlasse esplicitamente di perimetro e area, molti studenti, dalla scuola primaria alla superiore, dicono "perimetro" in luogo di "area" e viceversa), ad espressioni inadeguate dal punto di vista lessicale.
Si noti che il ricorso ad un linguaggio colloquiale di basso profilo formale o almeno culturale in àmbito matematico NON è fatto peculiare dei primi livelli di scolarità. Sono anzi alcuni studenti universitari quelli che più ci sorprendono con aggettivi e locuzioni assai poco cònsoni alla geometria ufficiale: «Se una [figura] lo fai sottilina…», «Se faccio una cosa molto spigolosa, il perimetro…» etc.
Moltissimi intervistati tentano di ricorrere a disegni esplicativi che illustrino, confermino, smentiscano il proprio pensiero; il risultato, però, è assai deludente: ben pochi studenti, senza distinzioni di livello scolastico, sanno usare davvero il disegno per validare o negare le proprie asserzioni; provano, ma non dominano questo specifico linguaggio grafico.

Interessante notare come allievi di V primaria di varie zone italiane che rispondono bene spontaneamente alla I domanda (se cioè, avendo un rettangolo ed un quadrato di ugual perimetro, necessariamente vi sia anche uguale area), affermano di no perché il quadrato è «più ampio», «ha più spazio dentro», «è più grosso»,…
È ovvio che tra quadrilateri isoperimetrici, il quadrato è quello di maggior superficie; e questo fatto viene immaginato, visto, intuito da un punto di vista grafico, più alla scuola primaria che poi. Naturalmente, non mancano i casi di studenti delle superiori che mostrano competenza su questi temi; in V, per esempio, abbiamo avuto casi di studenti che conoscevano e dominavano le relazioni tra superfici di figure isoperimetriche.

4.2.2.
Venendo al punto 3 della ricerca, abbiamo invitato i collaboratori a sottoporre a studenti diversi, che non erano stati sottoposti alla prova precedente, la seguente, durante interviste singole.
Essi dovevano consegnare a tali nuovi soggetti una scheda contenente le due figure seguenti:



(L'esagono B è stato ottenuto molto visibilmente dal rettangolo A eliminando un piccolo rettangolo in alto a destra).

Ora, a metà degli studenti andavano poste le due seguenti domande:

d1: La superficie di A è minore, uguale o maggiore della superficie di B?
E il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?

All'altra metà, invece, si dovevano porre le due seguenti domande:

d2: Il perimetro di A è minore, uguale o maggiore del perimetro di B?
E l'area di A è minore, uguale o maggiore dell'area di B?

Avevamo un'unica domanda di ricerca R3: Può l'ordine invertito delle domande che caratterizzano d1 e d2 modificare radicalmente le risposte degli studenti?

La nostra ipotesi I3 era che:

- in d1 gli studenti avrebbero verificato facilmente che l'area di A è maggiore di quella di B (perché è graficamente molto evidente) e avrebbero allora teso a dire, senza verifiche, che il perimetro di A è maggiore del perimetro di B; i collaboratori dovevano solo verificare se questa tendenza esisteva davvero;
- in d2 gli studenti sarebbero stati imbarazzati dalla prima domanda sul perimetro, che avrebbero dovuto verificare con attenzione perché NON è immediatamente evidente; una volta verificato che il perimetro di A è uguale a quello di B, tuttavia non avrebbero dovuto avere problemi a dire che l'area di A è maggiore di quella di B; i collaboratori dovevano far sì che lo studente verificasse che i due perimetri sono uguali e lo dicesse, dopo di che stare attenti a che cosa avrebbero risposto a proposito delle aree.

Se le cose avessero funzionato davvero così, avremmo contraddetto l'ipotesi di Azhari (1998) (ed almeno parzialmente fatta propria da Stavy e Tirosh, 2001) in base all'evidenza delle figure; non varrebbe allora più la loro supposta "legge di conservazione", ma tutto si ricondurrebbe ad un fatto legato a misconcezioni ed evidenze percettive.

I risultati delle prove fatte dimostrano in modo assolutamente incontrovertibile la nostra ipotesi; l'ordine delle domande è fondamentale nelle risposte ma, in questo caso, l'età (e dunque il livello scolastico) incide in forma statisticamente assai rilevante.
La risposta corretta alla domanda d1 è data spontaneamente ed immediatamente dal 90-91% dei casi;
la riposta corretta alla domanda d2 è data spontaneamente senza necessità di riflessione in non molti casi, anche ad alti livelli di scolarità, mentre viene data dopo prove o ripensamenti nell'84-85% dei casi.
Le risposte dunque non sono legate a quella supposta "legge di conservazione", ma a misconcezioni legate a quanto emerso nel paragrafo precedente ed all'evidenza percettiva che, nel caso dell'area, è immediata, mentre nel caso del perimetro no.
L'ipotesi di Azhari viene qui falsificata.

I problemi che si incontrano sono di tipi diversi e solo in parte attesi:

- alcuni studenti confondono nella loro terminologia area e perimetro; il che comporta l'inaccettabilità delle dichiarazioni dell'intervistato da parte del ricercatore;
- difficoltà di accettare confronti tra le due figure perché una delle due è figura insolita, non contemplata tra quelle cui la scuola ha dedicato formule;
- quando uno studente, specie dei primi livelli scolastici, tenta di misurare i perimetri, non sempre sa come comportarsi; da notare che, per rispondere alle domande, non era affatto necessario misurare alcunché; la misurazione viene tentata nei casi in cui il soggetto intervistato lo ritiene necessario (il che avviene in più casi del previsto, e non solo nella scuola primaria o media; vari studenti delle superiori fanno uso di quadrilateri specificandone sempre le misure dei lati e calcolandone area e perimetro).

5. Conclusioni e note didattiche

Visto l'andamento della ricerca con gli studenti è del tutto evidente che l'ostacolo che si oppone alla costruzione di una conoscenza soddisfacente sulle relazioni tra "perimetro ed area" non è solo di natura epistemologica bensì anche di natura didattica.
Esso quindi risiede nelle scelte didattiche:

- si usano sempre e solo figure convesse provocando la misconcezione che le figure concave *non possono* essere usate o è sconveniente usarle;

- si usano sempre solo figure standard provocando la misconcezione che viene spesso espressa con la frase: «Ma questa non è una figura geometrica»;
- quasi mai si mettono esplicitamente in relazione area e perimetro della stessa figura; anzi, a volte si insiste solo sul fatto che il perimetro si misura in metri (m) mentre l'area in metri al quadrato (m^2), insistendo sulle differenze e mai sulle reciproche relazioni;
- quasi mai si operano trasformazioni sulle figure in modo da conservare o modificare area e perimetro, creando una misconcezione sul significato che ha il termine "trasformazione"; molti studenti interpretano infatti spontaneamente con "trasformazione" una modifica che deve consistere solo in una rimpicciolimento o in un ingrandimento; nel caso (p=, S=) molti studenti rifiutano di conseguenza come "trasformazione" l'identità o una isometria.

La conferma di quanto sopra deriva anche dalla ricerca svolta con gli insegnanti; si verifica il caso di insegnanti, non solo di scuola primaria, che hanno reazioni del tutto analoghe a quelle degli studenti, di stupore cioè, di fronte ad un necessario cambio di convinzioni. Un insegnante afferma: «Ma se nessuno ci ha mai insegnato queste cose, come possiamo saperle?»; questa ci pare la conferma del fatto che quasi tutto si possa ricondurre ad ostacoli didattici.
Le scelte degli insegnanti NON avvengono dentro una corretta trasposizione didattica che li faccia agire trasformando un "Sapere" (che per alcuni di loro di fatto non c'è) in un "sapere da insegnare", in modo colto e consapevole (spesso, purtroppo, non c'è neppure consapevolezza della esistenza e della differenza tra "Sapere" e "sapere a insegnare"). Di fatto, almeno nel campo da noi indagato, si perpetra uno scenario di questioni acritiche, trite e ritrite, seguendo un copione prestabilito e consacrato dai libri di testo. La conferma sta nei seguenti fatti:

- quando l'insegnante cambia di convinzione, lo fa con sincera meraviglia
- insistendo sul fatto che questo argomento dovrebbe entrare esplicitamente nella didattica
- ripromettendosi spontaneamente a volte di includerlo nella propria azione didattica di insegnamento/apprendimento.

Bibliografia

Azhari N. (1998). *Using the intuitive rule «Same of A, same of B» in conservation tasks*. Manoscritto non pubblicato, cit. in Stavy, Tirosh (ved. oltre).

Battro A.M. (1969). *Il pensiero di Jean Piaget*. Bologna: Pitagora, 1983. [Ed. originale in lingua spagnola: 1969, Buenos Aires: Emecé].

Chamorro M.C. (1997). *Estudio de las situaciones de enseñanza de la medida en la escuela elemental*. Tesi di dottorato. UNED.

Chamorro M. C. (2001-02). Le difficoltà nell'insegnamento – apprendimento delle grandezze nella scuola di base. *La matematica e la sua didattica*. I parte: 4, 2001, 332-351. II parte: 1, 2002, 58-77.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzioni in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

Fischbein E. (1985). Intuizione pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Artusi Chini L (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli. 8-19.

Gentner D. (1983). Structure mapping: a theoretical framework. *Cognitive Science*. 7, 156-166.

Giovannoni L. (1996). Misure di estensione superficiale nella scuola dell'infanzia. *La matematica e la sua didattica*. 4, 394-423.

Iacomella A., Marchini C. (1990). Riflessioni sul problema della misura. *Periodico di matematiche*. 66, VI, 4, 28-52.

Jaquet F. (2000). Il conflitto area - perimetro. *L'educazione matematica*. I parte: 2, 2, 66-77; II parte: 2, 3, 126-143.

Marchini C. (1999). Il problema dell'area. *L'educazione matematica*. 1, 1, 27-48.

Medici D. (1999). Un problema e la sua analisi: frazione di terreno. In: Grugnetti L., Jaquet F. (eds.) (1999). *Il Rally matematico transalpino. Quali apporti per la didattica?* Atti delle giornate di studio sul Rally matematico transalpino. Brigue, 1997-98. Parma – Neuchâtel: Dipartimento di matematica dell'Università di Parma – IRDP di Neuchâtel.

Outhred L., Mitchelmore M. (1992). Representation of area: a pictorial perspective. *XVI PME*. 2, 194-201.

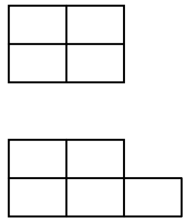
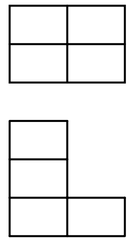
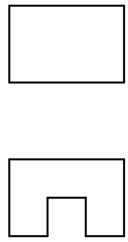
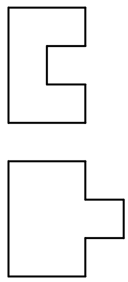
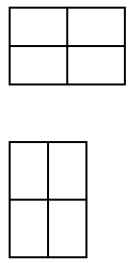
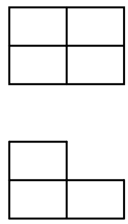
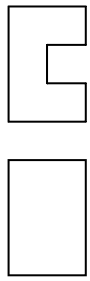
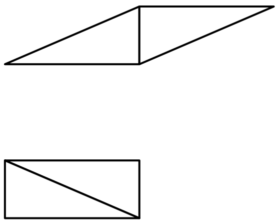
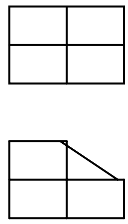
Piaget J. (1926). *La rappresentazione del mondo nel fanciullo*. Torino: Boringhieri, 1966. [Ed. originale in lingua francese: 1926, Paris: Alcan].

Piaget J. (1937). *La costruzione del reale nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia, 1973. [Ed. originale in lingua francese: 1937, Neuchâtel: Delachaux & Niestlé].
Piaget J., Inhelder B. (1962). *Lo sviluppo delle quantità fisiche nel bambino*. Firenze: La Nuova Italia, 1971. [Ed. originale in lingua francese: 1962, Paris-Neuchâtel: Delachaux & Niestlé].
Piaget J., Inhelder B., Szeminska A. (1948). *La geometria spontanea del bambino*. Firenze: Giunti Barbèra, 1976. [Ed. originale in lingua francese: 1948, Paris: PUF].
Resnick L.B., Ford W.W. (1981). *Psicologia della matematica e apprendimento scolastico*. Torino: Sei. [Ed. originale in lingua inglese: 1981, Hillsdale: Lawrence Erlbaum Associates].
Rogalski J. (1979). Quantités physiques et structures numériques. Mesures et quantifcation: les cardinaux finis, les longeurs, surfaces et volumes. *Bulletin de l'APMEP*. 320, 563-586.
Rouche N. (1992). *Le sense de la mesure*. Bruxelles: Didier Hatier.
Speranza F. (1987). La geometria dalle cose alla logica. In: D'Amore B. (ed.) (1987). *La matematica e la sua didattica*. Bologna: Pitagora. 105-114.
Stavy R., Tirosh D. (2001). *Perché gli studenti fraintendono matematica e scienze?* Trento: Erickson.
Tierney C., Boyd C., Davis G. (1990). Prospective Primary Teachers's Conception of area. *XIV PME*. 2, 307-315.
Vihn B. et al. (1964). *L'épistemologie de l'espace*. Paris: PUF.
Vihn B., Lunzer E. (1965). *Conservations spaciales*. Paris: PUF.

Gli Autori ringraziano i collaboratori alla ricerca per il prezioso aiuto fornito e per la enorme disponibilità non solo a condurre le prove di ricerca su allievi e colleghi, ma anche su sé stessi. Li ringraziano anche per la collaborazione fornita al termine del lavoro, con pazienti letture critiche e suggerimenti di modifiche.
Ringraziano altresì tutti coloro (colleghi e studenti) che hanno gentilmente accettato di sottoporsi alle prove; i loro nomi ovviamente qui non compaiono.
Ringraziano infine i tre anonimi referee per i preziosi suggerimenti critici.

APPENDICE

p	S	p	S	p	S
>	>	>	=	>	<
=	>	=	=	=	<
<	>	<	=	<	<

1 	**2** 	**3** 
4 	5 	**6** 
7 	**8** 	**9** 

Dalla conoscenza alla competenza nell'educazione matematica

Bruno D'Amore – Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
ASP – Alta Scuola Pedagogica - Locarno
MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas – Bogotà

Pubblicato in: D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2007). Dalla conoscenza alla competenza nell'educazione matematica. In: Benini AM., Orlandoni A. (eds.) (2007). *Matematica. Ricerca sul curricolo e innovazioone didattica*. Napoli: Tecnodid. 12-20. ISBN: 88-86100-22-1.

Summary. *In this article we analyze a point of view in which competence is proposed in terms of teaching-learning process, emphasizing the need to base the interpretation on learning and on the student's acceptance of responsibility of his own knowledge construction.*

Sunto. *In questo articolo si analizza un punto di vista in cui la "competenza" è proposta in termini di processo di insegnamento-apprendimento, dando enfasi sulla necessità di basare l'interpretazione sull'apprendimento, sull'assunzione di responsabilità da parte dello studente della costruzione della propria conoscenza.*

1. Varie accezioni del termine "competenza"

"*Competenza*" è parola usuale del vocabolario, ma ogni sua definizione è piuttosto variegata. Una sua utilizzazione in campo didattico o, meglio, nel processo di insegnamento- apprendimento, si è diffusa a macchia d'olio negli ultimi due decenni o poco più, ma è esplosa in ogni àmbito didattico solo nell'ultima dozzina d'anni.
Intendiamo per "processo di insegnamento – apprendimento" qualsiasi situazione che preveda questi due processi sia singolarmente sia in interazione tra loro, espliciti ed intenzionali. Intendiamo per "campo" o "àmbito" "didattico" un processo di insegnamento – apprendimento sul quale si agisce tenendo conto delle peculiarità dei risultati della ricerca in didattica. È sempre sottinteso che qui si parla della sola disciplina "matematica".
In alcuni Paesi la discussione su questo punto è rimasta a lungo soprattutto legata al livello teorico di discussione pedagogica, come in

Italia; in altri, come in molti Paesi di America Latina, Spagna, Belgio, Portogallo, USA, … è penetrata subito negli uffici ministeriali o simili, nel tentativo di coniugare verso questo termine ogni tipo di attività, soprattutto per quanto concerne:

- la determinazione del curricolo,
- le attività didattiche,
- la valutazione.

In Colombia, per esempio, fin dal 1994 (con la *Legge Generale della Educazione*, nella quale si istituiva il Sistema Nazionale di Valutazione dell'Educazione), all'ICFES (Instituto Colombiano de Fomento de los Procesos de Evaluación Escolar) fu assegnato l'incarico di creare strumenti e cornici teoriche per valutare il sistema educativo nazionale per mezzo di 4 aspetti: (1) curricolo, (2) attività didattica dei docenti in servizio, (3) studenti di ogni livello scolastico e (4) fattori associati (condizioni economiche e sociali di ciascuna istituzione, stato di preparazione dei docenti, attività dei dirigenti scolastici etc.). Per l'analisi dei primi 3 aspetti, si centrò l'azione su quanto concerne, appunto, la competenza. Per esempio, si valuta ufficialmente (fin dal 1995) un curricolo sviluppato da un docente, verificando che realmente permetta la costruzione di competenze da parte degli studenti; altro esempio, si valuta un docente attraverso le sue competenze professionali e didattiche (di azione nell'aula), sia attraverso le competenze personalmente possedute, sia attraverso la reale efficacia nel permettere ai propri studenti di costruirsi competenze. In altri termini, *tutto* il sistema educativo nazionale venne riformulato sul concetto di competenza. Si veda: Bonilla Estevéz, Fandiño Pinilla, Romero Cruz (1999).
Negli USA, per esempio, l'NCTM (The National Council of Teachers of Mathematics) (NCTM, 2000) ha scelto due gruppi di cinque nuclei (nel primo gruppo: Numeri e operazioni; Relazioni, funzioni e algebra; Geometria e senso spaziale; Misura; Analisi di dati, statistica e probabilità; nel secondo gruppo: Problem solving; Ragionamento e dimostrazione; Comunicazione; Collegamenti; Rappresentazioni) basati su competenze fondamentali che sono, evidentemente, più specifiche per la disciplina nel primo gruppo e più generali (c'è chi dice "trasversali") nel secondo.

A questo punto l'interpretazione del termine è diventata assai più complessa, tanto che si è reso necessario tentare di giungere ad una definizione sulla quale tutti gli studiosi potessero concordare (ciò, in realtà, non è ancora accaduto).

Nell'àmbito dei Convegni internazionali DeSeCo (*Definition and Selection of Competencies: Theoretical and Conceptual Foundations*), si è tentato un panorama ampio di molte delle definizioni possibili (Weinert, 2001) per arrivare, per ora, alla seguente sintesi: «una competenza è la capacità di affrontare un problema complesso o di svolgere un'attività complessa», definizione che sembra più una voce di dizionario che non la base per una nuova visione della didattica…
Tuttavia, nello stesso documento si evidenzia un aspetto a nostro avviso fondamentale, quando si afferma che una competenza non può ridursi a mere componenti cognitive, ma deve contenere diverse componenti da ascriversi al sapere, alle capacità, *agli atteggiamenti* (Ghisla, 2002).
Risulta così confermato quanto già da tempo affermato da vari autori (per esempio, D'Amore, 2000), e cioè che:

- nell'idea di competenza debba confluire anche una componente relativa ad atteggiamenti
- che la competenza vada ascritta *allo studente* (relativa cioè alla fase dell'apprendimento) e non *all'insegnante* (relativa cioè alla fase dell'insegnamento).

> D'altronde, in Roegiers (2000) la competenza viene definita come «la possibilità, per un individuo, di mobilitare in modo interiorizzato un insieme integrato di risorse in vista di risolvere una situazione appartenente a una famiglia di situazioni-problema». [Si noti che ogni termine è qui definito in modo rigoroso e che, in particolare, la "mobilitazione" è riferita a conoscenze]. In tale definizione si parla di "possibilità" e dunque di uno stato latente e potenziale e non attuale, più vicino dunque ad un atteggiamento che non ad un fare. Lo stesso Autore, in corrispondenza privata, suggerisce che quando si dice " risolvere una situazione appartenente a…", quell'*una* significa *una qualsiasi*; ed aggiunge che, se si parla di competenza in àmbito scolastico, allora bisogna aggiungere a "situazione" l'aggettivo "significativa". A noi sembra rilevante l'accentuazione sul carattere di "potenzialità" della definizione di competenza data da questo Autore.

Cercheremo di paragonare questa posizione a quella che è data in D'Amore (2000): «Competenza è concetto complesso e dinamico:

- complesso: si tratta dell'insieme di due componenti:
  - uso (esogeno)
  - padronanza (endogena)

  anche elaborativi, interpretativi e creativi, di conoscenze che collegano contenuti diversi

- dinamico: l’uso e la padronanza non sono l’unica espressione della competenza; la competenza racchiude in sé *come oggetto* non solo le conoscenze chiamate in causa, ma fattori meta-conoscitivi: l’accettazione dello stimolo a farne uso, il desiderio di farlo, il desiderio di completare le conoscenze che si rivelassero, alla prova dei fatti, insufficienti e dunque lo stesso desiderio di aumentare la propria competenza».

Per capire a fondo questa definizione, occorre ricordare che, per lo stesso autore: «Una conoscenza è, allo stesso tempo:

- la rielaborazione di contenuti in modo autonomo, per raggiungere una meta
- il risultato di tale elaborazione.

Una conoscenza può coinvolgere uno o più contenuti» e che «Un contenuto è una porzione limitata di sapere, ristretta ad un certo àmbito e limitata ad un certo soggetto, un certo tema specifico, un certo elemento di tale sapere».

Da qui si evince che, in questa interpretazione:

- la base della competenza è una porzione di sapere, un contenuto;
- l’insieme di elaborazione del contenuto e il risultato di questa elaborazione costituiscono la conoscenza (che dunque è già di per sé dinamica e coinvolge l’allievo, più che l’insegnante);
- la competenza è non solo l’uso e la padronanza di tali conoscenze (sempre dunque riferite all’allievo), ma pure un insieme di atteggiamenti che mostrano la disponibilità “affettivamente positiva” a volerne far uso (sempre da parte dello studente).

Nella proposta di Roegiers, che, secondo noi, ha una visione separabile in componenti attuale e potenziale, questi aspetti “affettivi” non emergono con la stessa forza, anche se, nelle sue proposte operative, essi sono sempre presenti.

In Arzarello, Robutti (2002) si afferma che le competenze «devono costituire un bagaglio (non tanto di nozioni, quanto delle abilità di risolvere situazioni problematiche, sapendo scegliere risorse, strategie e ragionamenti) per il cittadino». Torneremo su questa posizione alla fine del paragrafo 4.

2. Competenza e apprendimento

In ogni caso ed in ogni interpretazione, dunque, appare evidente che tutto quanto concerne l’idea stessa di competenza sembra essere più naturalmente legato, nel processo di insegnamento-apprendimento, alle intenzioni, alle potenzialità, alla volizione *del soggetto che apprende*.

È per questo che contrastiamo, non comprendendolo, il vezzo attuale di trasformare tutto ciò in una mera attività didattica di insegnamento, alla quale, in più parti, si sta dando il nome di "insegnare *per* competenze".
Ora, è vero che la lingua italiana sa essere ambigua, e spesso più di altre…
In inglese, sarebbe diversificata l'intenzionalità di una frase di questo tipo a seconda dell'uso della preposizione: "through" (come sembra volersi interpretare in italiano) che significa "attraverso, per mezzo di", in senso di mezzo o strumento; "for" che significa "allo scopo di, verso", in senso finalista. Nel primo caso, la competenza diventa una modalità didattica di insegnamento, nel secondo uno scopo, un obiettivo da far raggiungere.
In spagnolo, l'analogo nell'ordine potrebbe essere reso con "por" e "para".
Che cosa significa "insegnare *per* competenze", dunque? Proprio una interpretazione della posizione di Roegiers e certe sue esemplificazioni sembrano proporre agli insegnanti delle situazioni-problema di una data "famiglia" attraverso le quali gli studenti potrebbero motivarsi a tal punto da voler risolvere i singoli problemi, anche con interventi creativi.

3. Situazioni-problema e campi

L'idea di creare situazioni-problema di una stessa "famiglia" non può non far venire in mente le tre teorie seguenti:

- i "campi concettuali" di Vergnaud (che risalgono ai primi anni '80)
- i "campi di esperienza" di Boero (che risalgono agli anni '80)
- i "campi di semantici" di Boero (che risalgono alla fine degli anni '80, inizio '90)

per una trattazione riassunta dei quali rinviamo a D'Amore (1999, capitolo 12), ma che comunque qui di seguito ricordiamo.
I *campi concettuali* sono grandi sistemi di situazioni la cui analisi e trattamento richiedono vari tipi di concetti, procedimenti e rappresentazioni simboliche che sono connesse l'una con l'altra (Godino, 1991). Per esempio: le strutture additive, il campo concettuale delle strutture moltiplicative etc. «La teoria dei campi concettuali è una teoria cognitivista che si propone di fornire un quadro coerente e alcuni principi di base per lo studio dello sviluppo e dell'apprendimento di *competenze* complesse» (Vergnaud, 1990) [il corsivo è nostro].

I *campi di esperienza* sono «un settore dell'esperienza (reale o potenziale) degli allievi identificabili da essi, unitario, dotato di specifiche caratteristiche che lo rendono adatto (sotto la guida dell'insegnante) per attività di modellizzazione matematica, proposizione e risoluzione di problemi matematici ecc.» (Boero, 1989). Per esempio: Macchine, Scambi economici, Terra e Sole etc.
I *campi semantici* riguardano un aspetto «dell'esperienza umana (inerente la conoscenza della natura, o l'azione sul mondo che ci circonda, o la realtà artificiale e i sistemi di convenzioni prodotti dall'uomo, o le costruzioni culturali dell'uomo) che si presenta al *ricercatore*, in uno o più campi di esperienza, come unitario, non ulteriormente scomponibile, e razionalizzabile solo attraverso un uso pertinente, intenso e significativo di concetti e/o procedure disciplinari (matematiche e/o non matematiche)» (Boero, 1989, 1992, 1994). Per esempio: Ombre del Sole, Percorsi a piedi, Calcolatrici tascabili etc.

A noi pare piuttosto evidente che una grande parte di quella produzione attuale (dei primi anni 2000) che tende a vedere la problematica delle competenze come una strategia, una tecnica didattica, una scelta del docente, trovi invece una spiegazione ed una sistemazione teorica nei tre *campi* considerati poco sopra e non sia per nulla significativa, quanto alla decisione valutativa, se lo studente stia o no creandosi *competenze* attraverso il semplice ricorso ad una *famiglia di situazioni-problema*.
Inoltre, già nella definizione dei tre *campi* risultano evidenti i ruoli specifici che hanno gli allievi, gli insegnanti ed i ricercatori, ruoli per nulla suscettibili di confusione tra loro.

4. Competenza e apprendimento

Tutto ciò mostra, a nostro avviso, che l'idea di competenza non può essere ascritta alla pratica d'insegnamento e che dunque semplicemente non abbia senso parlare di "insegnare per competenze" (nel senso di "through" o di "por"); la competenza è il fine ultimo, il macro-obiettivo didattico generale, specifico per una o più conoscenze, dunque per più contenuti di una data disciplina. Tuttavia, la competenza ha una valenza affettiva e di atteggiamento così forte, da travalicare i contenuti disciplinari stretti.
In altre parole, per esempio:

- se è vero che le proprietà dei parallelogrammi costituiscono dei *contenuti* (saperi) all'interno della disciplina "matematica"
- solo una loro rielaborazione cosciente ed attiva (sapere e saper fare), con un risultato positivo di tale rielaborazione costituisce

una *conoscenza*; si vede subito che già la conoscenza implica particolari atteggiamenti ed il passaggio da motivazione a volizione;

- infine, mentre "uso" (in situazioni problema) e "padronanza" (elaborativi, interpretativi e creativi) relativi ad un contenuto sembrano dimostrare solo conoscenza, quando si tratta di comporre competenze su contenuti diversi, anche "osando" al di là delle consuetudini della vita d'aula, dunque creando collegamenti tra conoscenze diverse, nasce l'idea di superamento della semplice conoscenza verso la *competenza*: ciò si esplicita non soltanto attraverso la constatazione della costruzione di una conoscenza, ma anche attraverso atteggiamento, volizione, gusto, desiderio,… non solo di far uso delle conoscenze possedute, ma anche di completare le conoscenze che si rivelano insufficienti nel corso del loro uso, dunque la volontà esplicita di completare conoscenze specifiche, per esempio attraverso l'appropriazione di taluni contenuti che mancano per raggiungere uno scopo. In questo atteggiamento di disponibilità, ben si colloca l'idea di usare e manifestare la competenza fuori del mondo della scuola, nella vita quotidiana, da "cittadini" (com'è detto nella versione di Arzarello, Robutti, 2002) invece che da "studenti".

5. Competenza ed "azione didattica"

Tutto ciò naturalmente comporta riflessioni profonde su vari aspetti del campo didattico:

- ridefinire l'azione didattica ed in particolare:
    - la trasposizione didattica
    - l'ingegneria didattica
- ridefinire il "rapporto al sapere" dello studente (Chevallard, 1989, 1992; Schubauer Leoni, 1997; D'Amore, 1999) ed il ruolo dell'azione di mediazione dell'insegnante tra allievo e sapere
- ridefinire tutte le relazioni tra i tre "poli" del "triangolo della didattica" (D'Amore, Fandiño, 2002)
- ridefinire le attività d'aula; (pur sembrando la cosa più banale, è invece la più auspicata a tutti i livelli della noosfera e da tutti gli insegnanti)
- ridefinire termini e canoni della valutazione in senso criteriale e tenendo conto non solo delle *performance*, ma anche degli atteggiamenti (come, d'altra parte, da tempo si auspica) (Fandiño Pinilla, 2002).

Abbiamo voluto porre in modo esplicito i 5 punti precedenti, facendoli tutti iniziare con lo stesso verbo, per puntualizzare la "sfida" che appare come novità in questo agire didattico. Non si può pensare che il tutto si risolva con il cambiamento di un termine: qui si tratta di una vera e propria rivoluzione della quale appena si intravedono contorni e limiti. Tale cambiamento comporta modifiche profonde nella dinamica di aula, modifiche che vogliamo riassumere nella seguente tabella per dare loro visibilità immediata e schematica:

ieri	*oggi*	*domani*
trasmettere conoscenze	attivare la costruzione delle conoscenze	favorire la costruzione delle competenze
ripetere conoscen-ze disciplinari	creare situazioni a-didattiche	?

Il punto interrogativo trova, a nostro avviso, una prima risposta già nelle pagine stesse di questo scritto; ma l'attività docente è ancora tutta da definire.

6. Nodi concettuali. Nuclei fondanti

Supponiamo di lavorare didatticamente per far costruire competenze. Si tratta allora di scegliere contenuti che costituiscano il cardine, il cuore, il *nucleo* attorno al quale coagulare possibili altri contenuti, all'interno di un tema disciplinare che risulti di un qualche interesse didattico. In altre parole, più che dispiegare e sciorinare un lungo elenco di tanti contenuti, quel che occorre cercare di fare è di vagliare con estrema accuratezza e con molta sagacia didattica quelli che oramai si chiamano i "nuclei fondanti", disciplina per disciplina (altri li chiamano "nodi concettuali"). In D'Amore (2000) si afferma che: «Per nucleo fondante di una data disciplina potremmo intendere dei contenuti-chiave per la struttura stessa della disciplina, non tanto sul piano meramente didattico, quanto sul piano fondazionale, epistemologico». Ovviamente, se nella *definizione* di nucleo o nodo interviene la componente fondazionale (storica ed epistemologica)

della disciplina, nel loro coinvolgimento come azione didattica, invece, la riflessione sulla didattica è di definitiva importanza: «Si tratta di elaborare strategie didattiche nelle quali lo studente viene non attirato a prendere in esame catene di contenuti, ma a partecipare alla costruzione della sua propria competenza a partire da concetti scelti in modo tale da costituire interesse di per sé e sviluppi che coinvolgono ed amalgamano altri contenuti ritenuti chiave nello sviluppo della disciplina (la storia e l'epistemologia delle singole discipline possono aiutare molto in questa fase)» (D'Amore, 2000).
A nostro avviso, qui sì che si può parlare di *insegnare per nuclei fondanti* piuttosto che *per contenuti*, accettando che ciò significhi: «tessere una rete concettuale, strategica e logica fine ed intelligente, non certo ridurre le richieste; anzi, la scelta del nucleo è un modo per provare la tenuta delle sfide culturali! Ogni concetto è in realtà, come deve essere, il traguardo di un complesso sistema a maglie: d'altra parte, non esistono concetti totalmente isolabili e fanno parte di un concetto reti di relazioni più che singoli "oggetti" concettuali» (D'Amore, 2000).
Affermano anche Arzarello e Robutti (2002): «Il punto cruciale del raccordo tra gli aspetti di lungo termine con quelli più a breve termine è la scelta dei contenuti, che possono essere organizzati in assi portanti che percorrono l'intero ciclo di formazione: i nuclei, ossia quei concetti fondamentali che ricorrono in vari luoghi di una disciplina e hanno perciò valore strutturante e generativo di conoscenze». E poi proseguono: «I nuclei fondanti possono definirsi tali quando assumono un *esplicito valore formativo* rispetto alle competenze di cui sono i supporti. Per poterli individuare, non possiamo rimanere solo sul piano storico-epistemologico, ma dobbiamo impiegare contemporaneamente *anche* gli strumenti della ricerca psicopedagogica e didattica. È questo il punto chiave su cui occorre riflettere».

7. Nodi, nuclei e didattica

Se vogliamo entrare di più nel discorso didattico, più che di processo di insegnamento-apprendimento, qui si tratta soprattutto di un complesso sistema di *azioni pratiche* (come direbbe Juan Godino) che proseguono tra scelte di situazioni didattiche ed a-didattiche, nelle quali ultime lo studente accetta il suo ruolo non di ripetitore passivo di quanto gli è stato insegnato, ma di attore protagonista della costruzione. A questo va aggiunto, come necessario corollario, l'educazione al gusto dell'implicazione personale, al gusto dell'assunzione di responsabilità nel processo di costruzione dapprima

di conoscenza e poi di competenza, al gusto della sfida, al gusto della valutazione (quasi) autonoma dei risultati raggiunti, al gusto della spendibilità delle competenze raggiunte, non solo all'interno della scuola (cioè all'interno del sistema didattico), ma soprattutto fuori, come *cittadino*.
Tutto questo, certo, non è ascrivibile ad *un ben determinato ciclo scolastico*, ma diventa necessariamente la costante della continuità educativa.

Bibliografia

Arzarello F., Robusti O. (2002). *Matematica*. Brescia: La Scuola.

Boero P. (1989). Campi semantici nell'insegnamento-apprendimento della matematica: riflessioni su problemi di concettualizzazione e mediazione linguistica connessi ad esperienze di innovazione curricolare. *Report Seminario Nazionale di Pisa 1989*. Dattiloscritto.

Boero P. (1992). The crucial role of semantic fields in the development of problem solvine skills in the School Environment. In. Pedro Ponte J. P., Matos J. F., Fernandes F. (eds.) (1992). *Mathematicasl Problem Solving and New Information Technologies*. Berlin, Heidelberg: Springer Verlag.

Boero P. (1994). Experience fields as a tool to plan mathematics teaching from 6 to 11. In: *Proceedings II German-Italian Joint Symposium on Mathematics Education*. IDM Bielefeld, 1999. 45-62.

Bonilla Estevéz M., Fandiño Pinilla M.I., Romero Cruz J.H. (1999). La valutazione dei docenti in Colombia. Alcuni punti di riflessione. *La matematica e la sua didattica*. 4, 404-419.

Chevallard Y. (1989). Le concept de rapport au savoir. Rapport personel, rapport institutionel, rapport officiel. *Séminaire de Grenoble*. Irem d'Aix de Marseille.

Chevallard Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique: perspectives apportées par une approche antropologique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 1, 73-112.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2000). La complessità dell'educazione e della costruzione dei saperi. *Riforma e didattica*. 4, 35-40.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M. I. (2002). Un acercamiento analitico al "triángulo de la didáctica". *Educación Matemática*, Mexico DF, Mexico. 14, 1, 48-61.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2003). "Competenze": obiettivo per chi costruisce il proprio sapere. *La matematica e la sua didattica*. 3, 327-338.

D'Amore B., Godino D.J., Arrigo G., Fandiño Pinilla M.I. (2003). *Competenze in matematica*. Bologna: Pitagora.

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Ghisla G. (2002). Competenze. Aspetti della discussione a livello internazionale. *Rapporto interno ISPFP/Scuola media*. Lugano.

Godino J. (1991). Hacia una teoría de la didáctica de las matemáticas. In: Gutierrez A. (ed.) (1991). *Area de conocimiento: Didáctica de la Matemática*. Madrid: Sintesis. [Trad. it. : *La Matematica e la sua didattica*, 3, 1993, 261-288].

NCTM (2000). National Council of Teachers of Mathematics Principles and Standards for School Mathematics, http://www.nctm.org, 2000.

Roegiers X. (2000). *Une pédagogie de l'intégration*. Bruxelles: De Boeck Université.

Schubauer Leoni M. L. (1997). Rapporto al sapere del docente e decisioni didattiche in classe. In: D'Amore B. (ed.) (1997). *Didattica della matematica e realtà scolastica*. Atti dell'omonimo Convegno nazionale, Castel San Pietro Terme 1997. Bologna: Pitagora. 53-60.

Vergnaud G. (1990). La théorie des champs conceptuels. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 133-169. [Trad. it. di Francesco Speranza: *La matematica e la sua didattica*, 1, 1992, 4-19].

Weinert F. (2001). Concept of competence: a conceptual clarification. In: Rychen D., Salgenik. L. (eds.) (2001). *Defining and electing key competencies*. Seattle, Toronto, Bern, Göttingen: Hogrefe & Huber Publishers.

Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione"

Bruno D'Amore – Silvia Sbaragli

N.R.D. - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna - Italia
A.S.P. – Locarno – Svizzera

Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca: «Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico» finanziato con fondi 60% dall'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica).

Pubblicato in: D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2. 139-163.

Summary. *Our intention is to clarify the semantics of one of the most common terms in research into Mathematics Education over the past ten years: "misconception". The term is used in many different ways by various authors, for the most part being used with negative connotations as a synonym of "error". In our opinion, on the other hand, it should assume a more constructive connotation, thereby filling a gap. In this way, "an obstacle to learning" is semantically "an impediment to the correct construction of learning", thereby assuming a more meaningful nature: that of preceding knowledge now inadequate in the face of a new situation. From this point of departure, after having examined the origins and meanings of "misconception", we propose a new interpretation of the concept, both more articulate and less negative.*

Sunto. *In questo lavoro vogliamo fare chiarezza semantica su uno dei termini più usati da alcuni decenni nella ricerca in Didattica della matematica, "misconcezione"; tale termine viene interpretato in molti modi diversi dai vari Autori ed assume semplicemente il più delle volte connotati negativi, come sinonimo di "errore". A nostro avviso, invece, esso potrebbe assumere un connotato più costruttivo, assolvendo ad una lacuna; l'analogo sarebbe il seguente: "ostacolo all'apprendimento" è, semanticamente, una "barriera rispetto alla corretta costruzione di un apprendimento" e tuttavia oggi ha assunto un carattere più significativo, quello di una conoscenza precedente che non risulta essere adeguata ad una nuova situazione. Prendendo spunto da questa analogia, dopo aver discusso origini e*

significati di "misconcezione", giungiamo a proporre un'interpretazione di "misconcezione" più elaborata e meno negativa.

1. *Misconception,* una parola che viene dagli USA

La parola inglese *misconception* è interpretata solitamente come "giudizio erroneo", "idea sbagliata", ma anche "equivoco" o "malinteso"; si trova intesa anche nel senso più esteso di "concezione fallace".

Nel *Collins Coubuild English Dictionary for Advanced Learners*, versione 2001, della Harper Collins Publishers, si trova: «A misconception is an idea that is not correct. (…) Synonim: fallacy».

Nell'*Oxford Advanced Learner's Dictionary*, versione 1989, della Oxford University Press, si trova: «Misconception: a wrong idea or understanding of (sth) (…) Cf. Preconception».

Nel *Longman Dictionary of English Language and Culture*, versione 1998, della Addison Wesley Longman, si trova: «Misconception: (an example of) understanding sth wrongly».

L'uso del prefisso *mis* in inglese, d'altra parte, dà sempre una connotazione negativa al termine che lo segue; per esempio, *misinterpretation* è "interpretazione erronea", "malinteso"; mentre il verbo *mistake* è "sbagliare", "errare".

Per questa ragione le misconcezioni vengono spesso citate quando si fa riferimento alla didattica relativa agli errori.

2. Primi usi del termine

Molti Autori concordano sul fatto che i primi usi di questo termine, nel senso di "errore" o di "malinteso", si hanno nel dominio della Fisica o dell'Economia. Si fa infatti riferimento di solito a lavori di Di Sessa (1983); di Kahneman e Tversky (a partire dal 1982) riguardo ai processi decisionali; di Voss et al. (1989).

«I risultati di tali ricerche sono stati ampiamente utilizzati a sostegno dell'ipotesi costruttivista dell'apprendimento, che vede il soggetto protagonista attivo di tale processo, piuttosto che contenitore vuoto da riempire con opportune conoscenze» (Zan, 2000, pag. 48).

Alcune di queste "misconcezioni" sono state interpretate come "stereotipi" (Gardner, 1991).

Schoenfeld (1985) riporta esempi di come il contesto in cui si propongono quesiti possa influenzare le risposte, provocando fraintendimenti, e tali esempi, divenuti oramai dei classici, sono appunto tratti dalla Fisica (McCloskey, 1983).

Una delle prime apparizioni documentate del termine "misconception" in Matematica avviene in USA nel 1981, ad opera di Wagner (1981),

in un lavoro che tratta dell'apprendimento di equazioni e funzioni; sempre nel 1981 esce un celebre testo di Kieran (1981) sull'attività di risoluzione delle equazioni. Nel 1982 si pubblica un articolo che appartiene al dominio dell'apprendimento dell'algebra: Clement (1982). Nel 1983 abbiamo lavori di Wagner (1983) e di Kieran (1983) ancora sull'algebra. Appaiono poi numerosi lavori nel 1985 nei quali il termine "misconcezione" è esplicito: Schoenfeld (1985), Shaughnessy (1985) e Silver (1985), che lo usano per lo più a proposito di *problem solving*, insieme alle convinzioni o per spiegarne le interazioni.
In Silver (1985, pagg. 255-256) è detto esplicitamente che vi è un forte legame tra le misconcezioni e le convinzioni errate.
In Schoenfeld (1985, pag. 368) si evidenzia come gli studenti possano sviluppare in modo corretto delle concezioni scorrette, soprattutto per quanto riguarda procedure.
Come si vede bene, nella prima metà degli anni '80 ci fu un intenso lavoro degli studiosi di Didattica della matematica su questo tema. Lo stesso Fischbein negli anni '80 e '90 lavorò in questo campo, usando però solo a volte esplicitamente il termine, specie a proposito dell'apprendimento della probabilità (Fischbein et al., 1991; Lecoutre, Fischbein, 1998).
Interessanti citazioni del termine appaiono in Furinghetti, Paola (1991); in Bonotto (1992), dove è dato come sinonimo di "regola scorretta" (pag. 420); più volte il termine è usato in Arzarello, Bazzini, Chiappini (1994) a proposito dell'apprendimento dell'algebra. In tutti questi lavori il termine è interpretato nel senso negativo acquisito dalla letteratura.
Anche in Gagatsis (2003) si fa ampio uso del termine "misconcezione" nello stesso senso.
Bazzini (1995) sostiene: «Nell'ambito di studi più recenti, un affascinante settore di indagine è quello relativo alla funzione del ragionamento analogico nel processo di ristrutturazione della conoscenza individuale e del superamento di misconcetti (Brown, Clement, 1989)».
Più avanti, la stessa riferisce, citando Fischbein: «Non dobbiamo però dimenticare che se i vari tipi di ragionamento analogico da una parte possono favorire la costruzione di conoscenze, dall'altra possono indurre a conclusioni erronee nel momento in cui vengano enfatizzati o distorti particolari aspetti a svantaggio di altri. Se l'analogia è una potenziale generatrice di ipotesi, può essere anche causa di misconcetti o fraintendimenti (Fischbein, 1987, 1989). Succede spesso che, quando il soggetto si trova in forte incertezza di fronte a un

problema da risolvere, è portato a trasformare un certo nucleo di informazioni da un dominio ben conosciuto ad un altro meno noto tramite un trasferimento per analogia. Può avvenire allora che si assumano per valide corrispondenze analogiche che invece non sono plausibili per quei particolari sistemi. Si parla di analogie tacite che possono inserirsi nel processo cognitivo e perturbarlo».

In un testo del 1998, Rosetta Zan parla di misconcezioni come "causa di errori": «Le *convinzioni specifiche* scorrette ("misconceptions") sulla Matematica sono quelle responsabili di *errori*, che si presentano in forme diverse e in contesti diversi. Si tratta spesso di convinzioni implicite, di cui cioè il soggetto non è consapevole, e per questo agiscono in modo ancora più subdolo e sottile» (Zan, 1998).

La stessa Autrice, nel 2000, afferma: «Misconcetti, misconcezioni, concezioni errate, fraintendimenti, sono i termini italiani utilizzati in letteratura in corrispondenza del termine inglese "*misconceptions*"» (Zan, 2000).

Ancora la stessa Autrice, nel 2002, ribadisce l'importanza di tale campo di studio all'interno del particolare filone di ricerca relativo all'interpretazione di errori, sostenendo come il termine "misconcezione" sia spesso sostituito da espressioni alternative, pur rimanendo, al di là del nome, un fondamentale campo di studio per la ricerca in Didattica: «Se i comportamenti fallimentari causano errori, l'individuazione dei comportamenti fallimentari riconduce al classico filone di ricerca – trasversale – che è dato dall'interpretazione di errori. Appaiono interessanti in questo senso tutti i contributi che avanzano ipotesi interpretative sull'origine degli errori sistematici: in particolare quelli sui 'misconcetti'»[6] (Zan, 2002).

L'Autrice non riporta le cause dell'abbandono del termine originario "misconcezione", ma tale scelta sembra dipendere proprio dalla vastità di interpretazioni della parola "misconcezione", spesso citata in diversi contesti in modo ingenuo ed intuitivo, senza essere stata inquadrata precisamente all'interno degli specifici àmbiti scientifici. Anche per questa ragione riteniamo utile fare chiarezza sull'uso di questo termine in Didattica della matematica.

---

[6] In realtà si evita sempre più spesso di usare il termine originario *misconceptions*, preferendo espressioni alternative quali *alternative conceptions* o *implicit theories*. Sul motivo di questa scelta dovremo a lungo intervenire; per completezza accenniamo solo al fatto che si vuol evitare la connotazione del tutto negativa che quel "*mis*" comporta e comunque che si vuole evidenziare una certa qual varietà di interpretazioni. Noi finiremo con il dare una "definizione" problematica tutt'altro che negativa di questo termine.

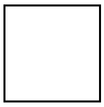
L'esempio presentato da Zan (2002) relativo agli errori sistematici,[7] inquadrato dalla letteratura successiva come misconcezioni,[8] si riferisce alle ricerche di Brown e Burton (1978) riguardanti la sottrazione:
«Un *bug* piuttosto tipico si può riscontrare nello svolgimento delle seguenti operazioni:

278-	352-	406-	543-	510-	1023-
135=	146=	219=	367=	238=	835=
143	214	213	224	328	1812

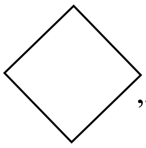
L'errore è sistematico e appare una *modificazione plausibile della procedura standard*: "in ogni colonna si sottrae *sempre* la cifra più bassa da quella più alta, indipendentemente dalla posizione".
Secondo Brown e Burton spesso il comportamento generale descritto deriva dal bisogno del bambino di controllare situazioni percepite come nuove: egli comincia con i casi che già conosce, facendone modifiche plausibili. In questo senso il bambino si comporta come uno scienziato, anche se, a differenza dello scienziato, egli non è consapevole di generalizzare, ma, soprattutto, generalizza in base a caratteristiche superficiali e non ai significati» (Zan, 2002).
Si percepisce in questo esempio una interpretazione non del tutto negativa del comportamento del bambino; egli, sì, commette un errore sistematico, ma questo deriva da una conoscenza che, in precedenti situazioni, si è rivelata efficace.
Su questo punto investiremo molta attenzione, successivamente.

Altri classici esempi di misconcezioni, per esempio riportati in Zan (1998), sono i seguenti:
«"Se moltiplico due numeri il risultato è maggiore di entrambi."
Questa, e la convinzione "simmetrica" sul risultato di una divisione (che deve essere più piccolo del dividendo), produce gravi conseguenze in molti contesti. Tipico il caso dei problemi di proporzionalità, nei quali la presenza di numeri decimali minori di 1 "blocca" strategie utilizzate in modo naturale con numeri interi.
Altri esempi:
"Questo è un quadrato:

[7] Gli errori sistematici vengono chiamati in Brown e Burton (1978): *bugs*.
[8] Anche Fischbein (1992c) in un paragrafo intitolato: "Errori e misconcetti" parla dei bugs, ossia degli errori sistematici, senza però usare esplicitamente nel testo la parola "misconcetti".



… ma questo è un rombo:



”

“Siccome 31>5, allora 0,31>0,5”.
A livello superiore una convinzione implicita molto forte e diffusa è:
“Un numero è negativo se e solo se nella sua rappresentazione simbolica compare esplicitamente il segno –”.
Alcune conseguenze di tale convinzione sono:

- la confusione fra integrali e area;
- log (-x) non è mai definito;
- un punto generico del terzo quadrante è (-x; -y), x, y $\in$ R».

Questi ed altri esempi di misconcezioni sono spesso proposti dalla letteratura (per esempio in D’Amore, 1999).
Il concetto di misconcezione non fu definito in termini precisi al momento del suo ingresso nel mondo della ricerca in Didattica della matematica, ma, come si è visto, è stato usato nel suo senso intuitivo e continua ad esserlo tuttora:
«Lo studio si basa sull’ipotesi che solo portando i futuri insegnanti ad esplicitare le loro convinzioni circa l’algebra sia possibile mettere a nudo loro eventuali rigidità concettuali, misconcezioni, carenze culturali, difficoltà, in modo tale da avviare discussioni e confronti che li portino ad acquisire consapevolezza delle loro lacune e, attraverso percorsi operativi mirati, giungere ad una ristrutturazione delle loro conoscenze e opinioni» (Malara, 2003).
Facendo riferimento ai misconcetti, Robutti (2003) sostiene:
«La ricerca in Educazione Matematica e Fisica ha fornito negli anni numerosi studi relativi a problemi di insegnamento-apprendimento, tra cui quello della costruzione e dell’interpretazione di grafici risulta essere uno dei più difficili. Nell’ambito di questa problematica, sono numerosi i misconcetti, i fraintendimenti, gli errori, che si presentano a tutti i livelli di età e tipi di scuole, compreso quello universitario. Si può pensare per esempio al misconcetto chiamato *graph as a picture (GAP)*, che consiste nella confusione tra il grafico e il fenomeno stesso. Se si tratta di un moto, la confusione è tra la traiettoria e la legge oraria; essa conduce gli studenti a interpretare per esempio un

grafico spazio-tempo come una traiettoria compiuta dall'oggetto in movimento» (e qui l'Autrice cita: Berg, Phillips, 1994; Clement, 1989).
Diversi studiosi hanno però preso in esame in maniera critica il sostantivo, per esempio nell'àmbito della Scuola Francese;[9] in una lettera privata che ci ha gentilmente autorizzato a rendere pubblica, Colette Laborde dichiara:
«Il termine misconcezione che ha origine negli Stati Uniti potrebbe non essere il termine più appropriato se ci si riferisce alla conoscenza degli studenti "non corretta". La nozione di "correttezza" non è assoluta e si riferisce sempre ad un dato sapere; il sapere di riferimento può anche evolversi. I criteri di rigore in Matematica sono cambiati considerevolmente nel tempo. Ogni concezione ha un suo dominio di validità e funziona per quel preciso dominio. Se questo non avviene, la concezione non sopravvive. Ogni concezione è in parte corretta e in parte non corretta. Quindi sembrerebbe più conveniente parlare di concezioni rispetto ad un dominio di validità e cercare di stabilire a che dominio queste appartengono».
Questa cautela ci trova del tutto d'accordo ed anzi mostreremo in **5.** e **6.** come le nostre interpretazioni siano, da parecchi anni, indirizzate proprio in questo senso. Di più, mentre la Laborde sembra fondare la sua analisi sulla Storia e l'Epistemologia, noi vi aggiungiamo come base critica la stessa Didattica.
Tenuto conto delle posizioni dei diversi Autori e delle occorrenze a volte anche piuttosto diverse di questo termine, riteniamo che l'attenzione sulle misconcezioni, fin dal loro apparire nel mondo delle scienze (non matematiche) sia stato molto produttivo perché ha costretto gli studiosi a non identificare più gli errori come qualche cosa di assolutamente negativo, da evitare a tutti i costi, ma come a prodotti umani dovuti a situazioni in via di evoluzione. Sempre più, negli anni, si è venuto a delineare un significato condiviso di "misconcezioni" come cause di errori o meglio ancora cause *sensate* di errori, cause che sono spesso ben motivabili ed a volte addirittura convincenti.
È dunque innegabile il fatto che questo tipo di studi ha costretto a prendere in esame l'interpretazione della realtà da parte del soggetto, interpretazione creata sulla base di convinzioni maturate anche grazie all'apprendimento. Dunque a vedere le misconcezioni come il frutto di una conoscenza, non come una assoluta mancanza di conoscenza.

[9] Tuttavia, in una nota a pagina 265, Artigue (1990), all'interno di un famoso articolo su *Epistemologia e Didattica*, evoca il termine "misconception" senza commenti.

3. Analogie semantiche con l'idea di "ostacolo"

Anche il termine "ostacolo" presenta una differenza sostanziale tra la sua idea semantica intuitiva e la sua connotazione specifica, universalmente assunta oggi in Didattica della matematica.

La parola "ostacolo" segnala in origine qualche cosa che si oppone ad un cammino, anche in senso figurato o metaforico, che costituisce un "impedimento", un "contrasto". Dunque, in prima approssimazione, sembrerebbe indicare qualche cosa di negativo in assoluto. Nel caso della costruzione di conoscenza, dunque, corrisponderebbe, in modo ingenuo, a qualche cosa che impedisce o tenta di impedire tale costruzione.

Ma Guy Brousseau a partire dal 1976 (Brousseau, 1976-1983) ci ha insegnato che "ostacolo" non è necessariamente una "mancanza di conoscenza", bensì una "conoscenza".[10] Questo modo di intendere il termine: *ostacolo*, era stato ripreso da studi filosofici di Gaston Bachelard (1938). Vediamo di che si tratta.

Da "ostacolo" funziona un'idea che, al momento della formazione di un concetto, è stata efficace per affrontare dei problemi (anche solo cognitivi) precedenti, ma che si rivela fallimentare quando si tenta di applicarla ad un problema nuovo. Visto il successo ottenuto (anzi: a maggior ragione a causa di questo), si tende a conservare l'idea già acquisita e comprovata e, nonostante il fallimento, si cerca di conservarla; ma questo fatto finisce con l'essere una barriera verso successivi apprendimenti.

In particolare, Brousseau fornisce (in quel primo lavoro ed in successivi) alcune caratteristiche degli ostacoli:

- bisogna sempre tener presente che un ostacolo non è una mancanza di conoscenza, ma una conoscenza;
- l'allievo usa questa conoscenza per dare risposte adatte in un contesto noto, già incontrato;
- se l'allievo tenta di usare questa conoscenza fuori dal contesto noto, già incontrato, fallisce, generando risposte scorrette; ci si accorge allora che si necessita di punti di vista diversi;
- l'ostacolo produce contraddizioni, ma lo studente resiste a tali contraddizioni; sembra allora necessitare di una conoscenza più generale, maggiore, più approfondita, che generalizzi la situazione nota e risolta, e che comprenda la nuova nella quale si è fallito; bisogna che questo punto venga reso esplicito e che lo studente se ne renda conto;

---

[10] L'idea di ostacolo è stata sistemata in modo definitivo negli anni successivi alla sua introduzione (Perrin-Glorian, 1994, pagg. 112-115 e oltre).

- anche una volta superato, in modo sporadico l'ostacolo riappare.

Da questo punto di vista è di estremo interesse la posizione secondo la quale, come scrive Federigo Enriques (1942),[11] l'errore «non appartiene né alla facoltà logica né all'intuizione, [ma] s'introduce nel momento delicato del loro raccordo».
L'errore, dunque, non è necessariamente solo frutto di ignoranza, ma potrebbe invece essere il risultato di una conoscenza precedente, una conoscenza che ha avuto successo, che ha prodotto risultati positivi, ma che non tiene alla prova di fatti più contingenti o più generali.
Dunque non si tratta sempre di errore di origine sconosciuta, imprevedibile, ma della evidenziazione di ostacoli nel senso sopra citato. Queste considerazioni hanno portato la ricerca in Didattica della matematica a rivalutare in modo molto diverso dalla prassi usuale l'errore ed il suo ruolo.
Attraverso l'esempio di "ostacolo", ci premeva mostrare come, già in passato, un'idea che nasce da un termine con accezioni ingenue del tutto negative, cambi radicalmente il suo significato al momento di entrare a far parte di un contesto scientifico più preciso.
È nostra intenzione, in questo testo, proporre un'interpretazione di misconcetto o misconcezione che superi le caratteristiche negative, anche se non del tutto assolute, del suo uso originario, di derivazione USA, per adattarsi alle esigenze dell'apprendimento della Matematica, nello stesso modo in cui la parola "ostacolo" vi si è adattata, cambiando addirittura il suo senso originario più spontaneo. Noi abbiamo fatto questa proposta semantica già dagli anni '90 e l'abbiamo sottoposta a prove di coerenza e di efficacia, ottenendo risultati che ci hanno ampiamente confortato, tanto da proporla qui, in maniera esplicita e consapevole.
Anche Zan (2002) parla dell'importanza didattica di tale concetto; riferendosi alle misconcezioni afferma:
«Gli studi in quest'area sono accomunati dall'enfasi su alcuni aspetti, che li differenzia in modo netto dagli studi precedenti sull'analisi degli errori (…):

- la motivazione a capire le radici dei misconcetti, e non solo ad eliminarli

[11] Per rintracciare questo articolo nella letteratura, bisogna cercare come autore Adriano Giovannini, lo pseudonimo che Enriques fu costretto ad usare sotto il regime fascista, per fuggire alle persecuzioni razziali e soprattutto per poter continuare a pubblicare, cosa che gli era allora proibita. Si ha allora la citazione (Giovannini, 1942).

- lo sforzo di assumere il punto di vista di chi apprende, piuttosto che quello dell'esperto
- l'accettazione della ragionevolezza dei misconcetti e quindi la necessità che l'allievo ne percepisca i limiti come pre-requisito per modificarli» (Zan, 2002).

4. Modelli intuitivi

Per arrivare alla nostra proposta, dobbiamo richiamare qui alcune note idee di Efraim Fischbein (1985a,b; 1992a) relativamente ai *modelli intuitivi*.
Si riserva il nome di *modello intuitivo* a quei modelli che rispondono pienamente alle sollecitazioni intuitive e che hanno dunque un'accettazione immediata forte.
Seguendo le parole di Fischbein (1985a):
«Il livello intuitivo si riferisce alla *dinamica dell'accettazione soggettiva di un enunciato matematico come cosa evidente e certa*».[12]
Di conseguenza: «Il termine "intuitivo" può avere, nei confronti dei modelli, due significati distinti tra loro connessi: uno è il significato generale di rappresentazione pittorico - comportamentale, l'altro si riferisce più specificamente alla capacità che certi modelli hanno di suggerire direttamente una soluzione come quella che si impone per la sua evidenza».
È in questo tipo di modello che si crea subito una corrispondenza diretta tra la situazione proposta ed il concetto matematico che si sta utilizzando.
Anticipiamo qui in parte il nostro punto di vista: questo modello si crea di solito come conseguenza della proposta da parte dell'insegnante di un'immagine forte e convincente di un concetto, che diventa persistente, confermata da continui esempi ed esperienze.
Si possono formare cioè dei modelli che finiscono con l'avere molta forza di persuasione e molta rilevanza nelle competenze dell'allievo: in altre parole sono dominanti sul piano intuitivo proprio grazie a questa rispondenza tra situazione descritta e Matematica utilizzata per farlo:
«Un modello intuitivo (…) induce sempre effetti di accettazione immediata. (…) Se il modello è realmente buono e se è stato realmente ben compreso, le sensazioni di evidenza e di certezza sono imposte dal modello stesso come un fatto globale colto in un'unica comprensione sintetizzante» (Fischbein, 1985a).

---

[12] Qui e nel seguito i corsivi delle frasi di Fischbein replicano quelli dell'Autore.

Ma non è detto che questo modello rispecchi il concetto in questione; in questo caso ci si scontra, talvolta, con modelli creatisi con la ripetizione, ma niente affatto auspicati:
«L'esistenza di incompatibilità e di contraddizione nelle relazioni tra il livello concettuale e il fondamento intuitivo rappresenta una delle principali fonti di idee sbagliate e di errori nell'attività matematica dei bambini» (Fischbein, 1985a).
Si verifica spesso che, in situazioni nelle quali non c'è un esplicito richiamo ad una competenza cognitiva forte, il modello intuitivo di un concetto emerge con energia. Si può ipotizzare infatti che, anche quando lo studente più evoluto si è costruito un modello corretto di un concetto, modello assai vicino al sapere matematico, in condizioni di normalità il modello intuitivo riappare, dimostrando la sua persistenza. Come sostiene Fischbein (1985a):
«L'insistere eccessivamente nel fornire suggerimenti intuitivi usando rappresentazioni artificiali e troppo elaborate può fare più male che bene. Chiaramente la Matematica è una scienza formale: la validità dei suoi concetti, enunciati e ragionamenti è basata su fondamenti logici; le argomentazioni non possono essere sostituite da processi intuitivi. Gli studenti devono divenire consapevoli di questo punto essenziale e devono imparare a pensare in questo modo specifico. Ciò significa che devono abituarsi ad accettare concetti o enunciati che *non hanno alcun significato intuitivo.* Forzando eccessivamente l'introduzione di interpretazioni intuitive per ogni concetto matematico, si riesce soltanto a impedire la comprensione della specificità della Matematica. *Ma, d'altra parte, dobbiamo essere consapevoli che noi tutti* (bambini, insegnanti e matematici!) *abbiamo la tendenza naturale ad attribuire ad ogni concetto o enunciato un'interpretazione intuitiva*, cioè un'interpretazione che, *per quanto possibile,* presenti il corrispondente concetto o enunciato come qualcosa di accettabile in modo immediato, evidente, comportamentale».
Per esempio, avendo accettato il modello intuitivo di moltiplicazione tra naturali ed avendolo erroneamente esteso a tutte le moltiplicazioni, modello intuitivo rafforzato dalle raffigurazioni schematiche (cosiddetto *per schieramento*), si forma quel modello "parassita" che si può enunciare così: la moltiplicazione accresce sempre.
Questo discorso di Fischbein vale in generale e non solo nel caso dell'operazione di moltiplicazione; analogo è il modello "parassita" della divisione che "diminuisce sempre". Inoltre, per quanto concerne la divisione, se non si conosce un po' di Didattica della matematica, si può correre il rischio di dare allo studente un altro modello intuitivo

che finirà con il produrre un modello indesiderato: in una divisione A:B, il numero B *deve* essere minore del numero A (Fischbein, 1985b; Deri, Sainati Nello, Sciolis Marino, 1983; D'Amore, 1993; D'Amore 1999).
Questi sono solo due dei numerosi esempi proposti da Efraim Fischbein (1985b; 1992a,b) nei quali l'Autore mette in evidenza il seguente fondamentale aspetto:
«Di conseguenza si può supporre che siano proprio i numeri e le relazioni tra essi a bloccare o a facilitare il riconoscimento dell'operazione di divisione come procedura risolutiva. Ogni operazione aritmetica possiede, oltre al suo significato formale, anche uno o più significati intuitivi. I due livelli possono coincidere oppure no».
Inoltre, per quanto riguarda l'addizione, Fischbein, raccogliendo un'idea di Gérard Vergnaud (1982), mette in evidenza un ulteriore esempio di non coincidenza tra significato formale e significato intuitivo proponendo una famosa terna di problemi additivi a una tappa (cioè problemi che si risolvono con una sola operazione di addizione) che appare citata in moltissimi testi e che è presente e discussa anche in D'Amore (1993) e Billio et al. (1993).
La sottrazione, poi, per sua stessa natura, presenta almeno due diversi significati intuitivi, a fronte di un unico significato formale; tali significati intuitivi si possono evidenziare ricorrendo ancora a due problemi suggeriti da Fischbein (1985b) che si risolvono entrambi con una sottrazione; ma, in un caso, quello che ha come significato il *togliere via* (come lo chiama Fischbein), la cosa è intuitiva perché c'è coincidenza tra significato formale e significato intuitivo; nell'altro caso, quello del *completamento a*, sembra essere più spontaneo il ricorso a strategie additive. [Altri esempi in questo senso sono presenti in D'Amore (1999)].
Seguendo il pensiero di Fischbein (1985b):
«Quando si cerca di risolvere un problema non ci si affida soltanto al livello algoritmico, anche se tutto il bagaglio di algoritmi necessari è virtualmente presente nella mente. Come abbiamo già sottolineato, il processo risolutivo comprende anche il contributo delle rappresentazioni intuitive. Quando l'algoritmo e il livello intuitivo lavorano in accordo si ottiene una semplificazione. In questo caso il ruolo della rappresentazione intuitiva non si nota neppure, ma se tra i due livelli c'è una relazione di conflitto, l'incidenza degli aspetti intuitivi diventa evidente».

5. Una proposta semantica per il termine *misconcezione*

Nel paragrafo precedente abbiamo parlato di "immagine" e di "modello" lasciandoli all'intuizione. Intendiamo ora precisare tale terminologia seguendo l'impostazione di D'Amore (1999, pag. 151; 2002; 2003) per poter inquadrare la nostra proposta semantica del termine "misconcezione".

Immagine mentale è il risultato figurale o proposizionale prodotto da una sollecitazione interna o esterna. L'immagine mentale è condizionata da influenze culturali, stili personali, in poche parole è un prodotto tipico dell'individuo, ma con costanti e connotazioni comuni tra individui diversi. Essa può essere elaborata più o meno coscientemente (anche questa capacità di elaborazione dipende però dall'individuo), tuttavia l'immagine mentale è interna ed almeno in prima istanza involontaria. L'insieme delle immagini mentali elaborate (più o meno coscientemente), tutte relative ad un certo concetto, costituisce il *modello mentale* (interno) del concetto stesso.

Ossia, lo studente si costruisce un'immagine di un concetto che crede stabile e definitiva; ma, ad un certo punto della sua storia cognitiva, riceve informazioni sul concetto che non sono contemplate dall'immagine che possedeva. L'allievo deve allora adeguare la "vecchia" immagine ad una nuova, più ampia, che oltre a conservare le precedenti informazioni, accolga anche le nuove, costruendosi così una nuova immagine del concetto. Si crea così un *conflitto* (D'Amore, 1999, pag. 123; 2003) tra la precedente immagine, che lo studente credeva definitiva, relativamente a quel concetto, e la nuova; ciò accade specialmente quando la nuova immagine amplia i limiti di applicabilità del concetto, o ne dà una versione più comprensiva. Dunque, il *conflitto cognitivo* è un conflitto "interno" causato dalla non congruenza tra due concetti o tra due immagini o tra un'immagine ed un concetto.

Alla base dei conflitti vi sono delle *misconcezioni*, che in questa prospettiva per noi sono delle "concezioni momentaneamente non corrette, in attesa di sistemazione cognitiva più elaborata e critica" (D'Amore, 1999, pag. 124). Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione.

Pur se continueremo nell'uso oramai diffuso di usare il termine "misconcezione", si potrebbe pensare di denominarle invece

"concezioni personali" proprio per evidenziarne il carattere costruttivo non necessariamente legato a fatti negativi,
Si può notare come, almeno in taluni casi, alcune immagini possono essere delle vere e proprie misconcezioni, cioè interpretazioni personali (diverse da quelle auspicate) delle informazioni ricevute. Chiamarle "*errori*" è troppo semplicistico e banale; in un certo senso, dato che anche i bambini molto piccoli hanno concezioni matematiche ingenue ma profonde (Aglì, D'Amore, 1995; D'Amore et al., 2004) ottenute empiricamente o per scambio sociale, si potrebbe addirittura pensare che tutta la carriera scolastica di un individuo, per quanto attiene la Matematica, sia costituita dal passaggio da misconcezioni a concezioni più evolute; esse sembrano cioè un momento delicato *necessario* di passaggio, da una prima concezione elementare, ingenua, spontanea, primitiva, ad una più elaborata e comprensiva.

Tale situazione può ripetersi più volte durante la "storia scolastica" di un allievo. Molti dei concetti della Matematica sono raggiunti grazie a passaggi, nel corso degli anni, da un'immagine ad un'altra più potente e si può immaginare questa successione di immagini come una specie di scalata che si "avvicina" al concetto.
Ad un certo punto di questa successione di immagini, c'è un momento in cui l'immagine ottenuta "resiste" a sollecitazioni diverse e si dimostra abbastanza "forte" da includere tutte le argomentazioni e informazioni nuove che si incontrano rispetto al concetto che rappresenta. Un'immagine di questo tipo forte e stabile, si può chiamare *modello* del concetto.
"Farsi un modello di un concetto", dunque, significa rielaborare successivamente immagini deboli e instabili per giungere ad una di esse definitiva, forte e stabile.
Si possono verificare due casi:
- *il modello si forma al momento giusto* nel senso che si tratta davvero del modello atteso, auspicato in quel momento, proprio quello previsto per quel concetto dal Sapere matematico al momento in cui si sta parlando; in questo caso, l'azione didattica ha funzionato e lo studente si è costruito il modello atteso del concetto;
- *il modello si forma troppo presto*, quando ancora avrebbe dovuto essere solamente un'immagine debole che necessitava di essere ulteriormente ampliata; a questo punto per l'allievo non è facile raggiungere il concetto perché la stabilità del modello è di per sé stessa un ostacolo ai futuri apprendimenti.
In un certo senso, le immagini-misconcezioni, essendo in continua evoluzione nella complessa scalata verso la costruzione di un concetto

(D'Amore, 1999, 2001), non sempre risultano di ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi, a meno che esse non diventino forti e stabili *modelli* indesiderati di un concetto (Sbaragli, 2005).
Più "forte" è il modello intuitivo, più difficile è infrangerlo per assimilare e accomodare una nuova immagine più comprensiva del concetto.[13] In questi casi, le misconcezioni, che potrebbero non essere considerate in senso negativo, se viste e proposte come momento di passaggio, diventano ostacoli per i successivi apprendimenti e difficili da superare.
Didatticamente conviene quindi lasciare immagini ancora instabili, in attesa di poter creare modelli adatti e significativi, vicini al Sapere matematico che si vuole raggiungere.
L'esplicitazione, da parte dell'allievo, di una misconcezione avviene con quella *segnalazione di un malessere cognitivo* che si chiama usualmente e banalmente "errore": lo studente sbaglia, cioè non dà la risposta attesa dall'insegnante.
Dare agli *errori* una sola connotazione negativa e non interpretarli come segnali di malessere cognitivo, appunto, è troppo semplicistico e banale: non si tratta solo di valutare negativamente lo studente che sbaglia; si tratta, invece, di dare gli strumenti necessari per l'elaborazione critica.
Ci serviamo ancora di Fischbein:
«Eventuali conflitti tra il livello intuitivo, il livello algoritmico e il livello formale non possono essere eliminati ignorando semplicemente il livello intuitivo. A nostro parere, così come avviene nei processi psicoanalitici, lo studente deve essere aiutato a prendere coscienza di tali conflitti. Ciò può essere fatto discutendo con gli studenti gli errori dovuti specificatamente all'intuizione e cercando insieme a loro l'origine di questi errori. In ogni caso questo processo di chiarificazione verbale non è sufficiente. Gli studenti devono sviluppare la capacità di analizzare le loro risposte, di rendere esplicite il più possibile le loro supposizioni implicite, di usare le strategie formali per verificare tali supposizioni intuitive» (Fischbein, 1985b, pag. 130).
Sta all'adulto, al docente, rendersi conto che quelli che lo studente crede essere concezioni corrette, sono in realtà delle misconcezioni.
Si tratta allora di non dare informazioni distorte e sbagliate; non solo non darle in modo esplicito, ma addirittura evitare che si formino

---

[13] Alla base di questo tipo di problematiche, poniamo alcuni studi di Piaget sui processi di equilibrazione ed accomodamento ed in particolare una delle sue ultime opere dedicata a questo tema (1975), anche se oggi c'è stata una grande evoluzione di ricerche in questo campo (D'Amore, 1993).

autonomamente per non favorire l’insorgere di modelli “parassiti”, in quanto accomodare un modello “parassita” trasformandolo in un nuovo modello comprensivo di una diversa situazione non è affatto facile, dato che il modello è per sua stessa natura forte e stabile.
Esempi in questo senso sono presenti in D’Amore (1999) e Sbaragli (2005). In quest’ultimo lavoro si delinea una distinzione tra i diversi tipi di misconcezioni: “evitabili” e “inevitabili”.
Le misconcezioni “evitabili” derivano *direttamente dalla trasposizione didattica del sapere*, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. Queste misconcezioni dipendono dalla prassi scolastica “minata” da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi. D’altra parte, afferma Zan: «Si può riconoscere che nella formazione delle convinzioni ha una notevole responsabilità il tipo di insegnamento ricevuto» (Zan, 1998).
Le misconcezioni “inevitabili” derivano solo *indirettamente dalla trasposizione didattica*, essendo imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che non potrà mai essere esaustivo dell’intero concetto matematico che si vuol proporre. In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come *inevitabili* momenti di passaggio nella costruzione dei concetti.
L’obiettivo didattico da porsi deve quindi mirare alla strutturazione coerente e significativa dell’*ingegneria didattica* (Artigue, 1989, 1992) che deve essere pensata e organizzata dall’insegnante in modo da aiutare a “combattere” i contrasti causati dall’ambiente o ìnsiti in esso, nel tentativo di non creare misconcezioni “evitabili” e di superare misconcezioni “inevitabili”, allo scopo di favorire una efficace costruzione dei concetti matematici.
Appare ovvio che la distinzione tra misconcezioni “inevitabili” ed “evitabili” rimandi a quella tra ostacoli epistemologici e didattici.

6. Un solo esempio concreto di “misconcezione” in Didattica della matematica; il caso della moltiplicazione

Presentiamo in questo paragrafo **6.** un solo esempio di uso del senso di “misconcezione” dato in **5.** L’esempio è scelto in modo critico, proprio per mostrarne le peculiarità in senso didattico, storico ed epistemologico. Analoghi esempi potrebbero essere fatti in quantità.
Sappiamo dalla letteratura che la formazione prematura di un modello concettuale di moltiplicazione quando si ha a disposizione solo l’insieme N dei numeri naturali genera spesso misconcezioni quando si passa ad un altro insieme numerico, tra le quali la più conosciuta e difficile da superare è quella segnalata da noi in questo stesso articolo:

il prodotto è maggiore dei fattori. Ad esempio, il tentativo di continuare ad applicare tale modello quando la moltiplicazione viene eseguita sull'insieme Q dei numeri razionali si rivela fallimentare. Risulterebbe allora utile didatticamente lasciare immagini in continua evoluzione cercando di non creare troppo presto modelli forti e stabili.
Per entrare più in dettaglio, consideriamo l'insieme N dei numeri naturali; sia × l'ordinaria moltiplicazione definita in N (interna).
L'immagine concettuale che viene proposta per tale operazione si fonda su due specifici riferimenti espliciti:

- formale: la moltiplicazione è definita come un'addizione ripetuta (cioè 5×3 è 5+5+5)
- grafica: la moltiplicazione è rappresentata graficamente da un rettangolo di punti-unità (per esempio 5×3 è rappresentata da 3 file di 5 punti-unità).

La moltiplicazione in N, qualora dovesse limitarsi ad N e non dovesse essere estesa a Q, non crea le tipiche misconcezioni segnalate da decenni dai ricercatori a questo proposito; ad esempio, la misconcezione più diffusa, così come noi l'abbiamo espressa, in N è una concezione vera: effettivamente, in N, il prodotto è sempre maggiore dei fattori (a parte il caso in cui siano coinvolti numeri assai speciali come 0 ed 1).
Come abbiamo già evidenziato, questa misconcezione è basata principalmente sul fatto che la peculiarità più evidente ed intuitiva della moltiplicazione in N, cioè il fatto che il prodotto è maggiore dei singoli fattori, viene meno in Q.
Sia la "giustificazione formale", sia quella "grafica" perdono di senso quando uno dei due fattori è un numero del tipo 0.2:

- che senso ha giustificare l'operazione 5×0.2 considerando l'addizione di 5 a sé stesso per 0.2 volte?
- che senso ha giustificare la stessa operazione 5×0.2 considerando 0.2 file di 5 unità?

Secondo alcuni Autori, sarebbe allora opportuno cambiare nome e simbolo alla moltiplicazione. Effettivamente, l'idea di conservare nome e simbolo avviene, il più delle volte, dopo che lo studente potrebbe essersi oramai fatto un modello (stabile, duraturo) dell'operazione × in N, "arricchito" dunque oramai ineluttabilmente dalla misconcezione che lo accompagna e che diventa "parassita" in Q. Questi Autori suggeriscono tale espediente didattico sulla base della convinzione che l'operazione di "moltiplicazione" definita in Q non è la stessa di quella prima definita in N.
La nostra proposta di terminologia si basa essenzialmente sul fatto che la storia e la prassi ci insegnano a denominare sempre

"moltiplicazione" quella/e operazione/i, sia che sia/no definita/e in N che in Q.
Bisogna semplicemente riconoscere che (N, $\times_N$) è una struttura isomorfa ad una sottostruttura di (Q, $\times_Q$), il che costituisce un esempio facilmente dominabile di uno dei momenti più interessanti della Matematica e della costruzione del pensiero matematico: l'estensione da una struttura ad un'altra. Detto ciò, ha senso storico, epistemologico e didattico pensare che la moltiplicazione in Q sia un'estensione che conserva il nome della moltiplicazione in N. Il che rende lecito uniformare $\times_N$ e $\times_Q$ nell'unico simbolo usuale $\times$.
Accettato questo, assume grande rilevanza didattica il passaggio della operazione di moltiplicazione da N a Q, un'operazione che conserva il nome giacché si tratta di una estensione.
Certo, questa scelta, peraltro la più seguita, genera qualche problema didattico di costruzione di immagini prima, di modelli poi, al momento opportuno, con le conseguenti problematiche relative alla formazione di misconcezioni che, per non avere pesanti ripercussioni negative, devono restare al livello di immagini e non diventare modelli.[14]
Se ciò avviene, questo tipo di misconcezioni "inevitabili" sono da noi interpretate non come errori definitivi e del tutto negativi, come fraintendimenti ineludibili e non superabili, ma come momento di passaggio, errori momentanei, sotto controllo dal punto di vista del docente, in attesa di sistemazione.
Proprio per questo la nostra proposta semantica si rivela intrinsecamente coerente e coerente anche con il processo di assimilazione ed accomodamento di Piaget.

Restano due considerazioni finali.

La prima.
Noi riteniamo che l'apprendimento in Matematica consti di almeno 4 componenti ben distinte ma non del tutto separate l'una dall'altra (Fandiño Pinilla, 2005):
- apprendimento concettuale (noetica)
- apprendimento algoritmico

---

[14] Non vogliamo entrare nello specifico di questo esempio, tuttavia facciamo notare che molti Autori, tra i quali Fischbein, 1992b, insistono sulla necessità di mostrare diversi modelli per l'operazione di moltiplicazione (ma il discorso vale in generale). Tuttavia, nelle condizioni di apprendimento scolastico, bisogna mettere in conto una certa inevitabilità della nascita di misconcetti e dunque sviluppare processi di controllo per conoscerli e riconoscerli negli allievi.

- apprendimento strategico (risolvere problemi, fare congetture, saper dimostrare, …)
- apprendimento comunicativo (saper comunicare, definire, validare,…).

Così come si fa in letteratura, anche noi abbiamo posto l’accento sulla misconcezione esclusivamente riferita al primo punto; ma nulla ci vieta di pensare che, cambiando quanto vi sia da cambiare, non si possa parlare di misconcezione negli altri tre punti, adattando bene situazioni e terminologie.

La seconda.
Seguendo le orme di Bachelard, anche a noi piace vedere la misconcezione come un’occasione che ha favorito lo sviluppo scientifico (Giovannini, 1942). Ci sembra che, in futuro, bisognerà capire bene come e perché la misconcezione ha un ruolo analogo, in didattica, nel favorire l’apprendimento concettuale di quegli studenti che riescono a superarla. L’analogia sembra forte ed allettante.

Bibliografia

Aglì F., D’Amore B. (1995). *L’educazione matematica nella scuola dell’infanzia*. Milano: Juvenilia.

Artigue M. (1989). *Epistémologie et didactique*. IREM. Paris VII.

Artigue M. (1990). Epistémologie et didactique. *Recherches en didactique des mathématiques*. 10, 2-3, 241-286.

Artigue M. (1992). Didactic engineering. In: Douady R., Mercier A. (eds.). Research in didactique of mathematics: Selected papers (Special issue). *Recherches en didactique des mathématiques*. 12, 41-65.

Arzarello F., Bazzini L., Chiappini G. (1994). *L’algebra come strumento di pensiero. Analisi teorica e considerazioni didattiche*. Quaderno n° 6. Progetto Strategico CNR “Tecnologie e innovazioni didattiche”. Pavia.

Bachelard G. (1938). *La formation de l’esprit scientifique*. Paris: Vrin.

Bazzini L. (1995). Il pensiero analogico nell'apprendimento della matematica: considerazioni teoriche e didattiche. *L’insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 2, 107-130.

Berg C.A., Phillips D.G. (1994). An investigation of the relationship between logical thinking structures and the ability to construct and interpret line graphs. *Journal of research in science teaching*. 27, 803-815.

Billio R., Bortot S., Caccamo I., Giampieretti M., Lorenzoni C., Rubino R., Tripodi M. (1993). Sul problema degli ostacoli intuitivi

nell'uso dell'addizione. *La matematica e la sua didattica*. 4, 368-386.
Bonotto C. (1992). Uno studio sul concetto di numero decimale e di numero razionale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 15, 5, 415-448.
Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la C.I.E.A.E.M.: *La problematique de l'enseigmente des mathématiques.* Belgique: Louvain la Neuve. 101-117. [Ripubblicato su: *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 1983, 165-198].
Brown J.S., Burton R.R. (1978). Diagnostic models for procedural bugs in basic mathematical skills. *Cognitive science*. 2(2), 155-192.
Brown D.E., Clement J. (1989). Overcoming misconceptions via analogical reasoning: abstract transfer versus explanatory model construction. *Instructional Science*. 18, 237-261.
Clement J. (1982). Algebra word problems solutions: thought processes underlying a common misconception. *Journal for research in mathematics education*. 13, 36-46.
Clement J. (1989). The concept of variation and misconceptions in cartesian graphing. *Focus on learning problems in mathematics*. 11(1-2), 77-87.
D'Amore B. (1993). *Problemi. Pedagogia e psicologia della matematica nell'attività di problem solving*. Milano: Angeli. II ed. it. 1996. [Ed. in lingua spagnola: Madrid, Sintesis, 1996].
D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.
D'Amore B. (2001). Un contributo al dibattito su concetti e oggetti matematici: la posizione "ingenua" in una teoria "realista" vs il modello "antropologico" in una teoria "pragmatica". *La matematica e la sua didattica*. 1, 4-30.
D'Amore B. (2002). La ricerca in didattica della matematica come epistemologia dell'apprendimento della matematica. *Scuola & Città.* Firenze: La Nuova Italia. 4, 56-82.
D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Pitagora: Bologna.
D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I., Gabellini G., Marazzani I., Masi F., Sbaragli S. (2004). *Infanzia e matematica. Didattica della matematica nella scuola dell'infanzia*. Bologna: Pitagora.
Deri M., Sainati Nello M., Sciolis Marino M. (1983). Il ruolo dei modelli primitivi per la moltiplicazione e la divisione.

L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate. 6, 6, 6-27.
Di Sessa A. (1983). Phenomenology and the evolution of intuition. In: Gentner D., Stevens A. (eds.) (1983). *Mental models*. Hillsdale, N.J.: Laurence Erlabaum. 15-33.
Fandiño Pinilla M.I. (2005). *Le frazioni. Aspetti concettuali e didattici*. Bologna: Pitagora.
Fischbein E. (1985a). Intuizione e pensiero analitico nell'educazione matematica. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 8-19.
Fischbein E. (1985b). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.
Fischbein E. (1987). *Intuition in Science and Mathematics*. Dordrecht: D. Reidel Publ. Company.
Fischbein E. (1989). Tacit Models and Mathematical Reasoning. *For the Learning or Mathematics*. 2, 9-14.
Fischbein E. (1992a). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 25-38.
Fischbein E. (1992b). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 1-24.
Fischbein E. (1992c). Intuizione e processo informativo nell'attività matematica. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. A cura di B. D'Amore. Bologna: Pitagora. 51-74.
Fischbein E., Sainati Nello M., Sciolsi Marino M. (1991). Factors affecting probabilistic judgments in children and adolescents. *Educational studies in mathematics*. 22, 523-549.
Furinghetti F., Paola D. (1991). The construction of a didactic itinerary of calculus starting from the students' concept images (age 16-19). *International journal mathematical education in science and technology*. 22, 719-729.
Gagatsis A. (2003). *Comprensione e apprendimento in matematica*. Bologna: Pitagora.
Gardner H. (1991). *Educare al comprendere. Stereotipi infantili e apprendimento scolastico*. Feltrinelli 1993. I ed. orginale USA 1991.
Giovannini A. (Enriques F.) (1942). L'errore nelle matematiche. *Periodico di matematiche*, IV. XXII.
Kahneman D., Tversky A. (1982). On the study of statistical intuitions. In: Kahneman D., Slovic P., Tversky A. (eds.). *Judgement*

under uncertainty: heuristics and biases. Cambridge: Cambridge University Press. 493-508.

Kieran C. (1981). Concepts associated with the equality symbol. *Educational studies in mathematics*. 12. 317-326.

Kieran C. (1983). Relationships between novices' views of algebraic letters and their use of symmetric and asymmetric equation-solving procedures. In: Bergeron J.C., Herscovics N. (eds.) (1983). *Proceedings of the fifth annual meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education.* Montreal: University of Montreal. 1, 161-168.

Lecoutre M.P., Fischbein E. (1998). Évolution avec l'âge de "misconceptions" dans les intuitions probabilistes en France et Israël. *Recherches en didactique des mathématiques*. 18, 3, 311-332.

Malara N.A. (2003). Opinioni sull'algebra di futuri insegnanti: incidenza del retroterra culturale. *La matematica e la sua didattica.* 1, 17-42.

Mc Closkey M. (1983). Intuitive physics. *Scientific american*. 114-122.

Perrin-Glorian M.J. (1994). Théorie des situations didactiques: naissance, développement, perspectives. In: Artigue M., Gras R., Laborde C., Tavignot P. (eds). (1994). *Vingt ans de didactique des mathématiques en France. Hommage à Guy Brousseau et Gérard Vergnaud.* Grenoble: La pensée sauvage. 97-147.

Piaget J. (1975). *L'équilibration des structures cognitives.* Paris: PUF.

Robutti O. (2003). Il senso del grafico con la mediazione delle tecnologie: metafore attivate e significati costruiti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 173-195.

Sbaragli S. (2005). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.

Schoenfeld A. H. (1985). *Mathematical problem solving.* New York: Academic Press.

Shaughnessy J.M. (1985). Problem-Solving derailers: The influence of misconceptions on problem-solving performance. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving*: *Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 399-415.

Silver E.A. (1985). Research on teaching mathematical problem solving: some under represented themes and needed directions. In: Silver E.A. (ed.) (1985). *Teaching and learning mathematical problem solving. Multiple research perspectives.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 247-266.

Vergnaud G. (1982). A classification of cognitive tasks and operations of thought involved in addition and substraction problems. In: Carpenter T.P., Moser J.M., Romberg T.A. (eds.) (1982). *Addition and substraction.* Hillsdale N.J.: Lawrence Erlbaum. 39-59.

Voss J. F.., Blais J., Means M.L., Greene T.R., Ahwesh E. (1989). Informal reasoning and subject matter knowledge in the solving of economics problems by naïve and novice individuals. In: Resnick L.B. (ed.). Knowing, learning and instruction: *Essays in honor of Robert Glaser.* Hillsdale, N.J.: Lawrence Erlbaum. 217-250.

Wagner S. (1981). Conservation of equation and function under transformations of variable. *Journal for research in mathematics education.* 12, 107-118.

Wagner S. (1983). What are these things called variables? *Mathematics Teacher.* 76, 474-479.

Zan R. (1998). *Problemi e convinzioni.* Bologna: Pitagora.

Zan R. (2000). "Misconceptions" e difficoltà in matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 23, 1, 45-68.

Zan R. (2002). *Verso una teoria per le difficoltà in matematica. Contributo al dibattito sulla formazione del ricercatore in didattica.* Materiale del Seminario Nazionale 2002. http://www.dm.unito.it/semdidattica/index.html

Gli autori ringraziano le colleghe ed amiche Rosetta Zan e Colette Laborde per i preziosi suggerimenti.

Ringraziano inoltre i tre referee per l'occasione che hanno fornito di riflettere su alcuni punti dell'articolo.

Educare alla competenza matematica

Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
ASP – Alta Scuola Pedagogica - Locarno
MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas – Bogotà

Pubblicato in: Fandiño Pinilla M.I. (2006). Educare alla competenza matematica. *Rassegna*. Numero speciale: D'Amore B. (ed.). *Matematica: l'emergenza della didattica nella formazione*. Bolzano: Istituto Pedagogico di lingua italiana. 21-28.

Summary. *In this paper we propose a pragmatic-anthropological foundation for Mathematics Education "for competences", providing a perspective based on didactic practice, also in relation to teacher training.*

Sunto. *In questo articolo viene presentata una base pragmatica-antopologica "per competenza" specifica per la didattica della matematica, fornendo una prospettiva basata sulla pratica didattica posta anche in relazione con la formazione degli insegnanti.*

La *competenza* è oggi da tutti riconosciuta come qualche cosa di più che una *conoscenza*, ben di più che un "saper fare in un dato contesto", come vari Autori la definivano al momento iniziale del dibattito, qualche decennio fa. La competenza implica anche un "*voler* fare", dunque chiama immediatamente in causa fatti affettivi, come motivazione, volizione e atteggiamento.[15]

1. Motivazione/Volizione

Alla base di ogni costante d'azione, c'è sempre un processo psichico - intellettuale che potremmo identificare con la coppia motivazione - volizione.
I modi di intendere la motivazione sono tre; li delineo qui di seguito.

---

[15] Per evitare continue citazioni bibliografiche che potrebbero diventare noiose, preferisco dire una volta per tutte, all'inizio di questo testo, che farò continui riferimenti a D'Amore (1999a) per quanto riguarda la Didattica della matematica; ed a Fandiño Pinilla (2002) per quanto riguarda curricolo e valutazione. Altri testi verranno esplicitamente citati nel corso del lavoro.

- Ogni problema può essere presentato come la ricerca della soddisfazione di una necessità avvertita dalla società di appartenenza, nella sua generalità, il che fa sì che gli interessi personali di ciascuno si trasformino nell'interesse del gruppo sociale di appartenenza. In questa direzione, l'interesse dell'allievo sarà centrato nell'essere utile alla società; su questa base sono orientati molti dei programmi educativi ufficiali di vari Paesi. Sotto questo profilo, le lezioni, le attività che permettono di scoprire le relazioni fra teoria e pratica sono quelle che risvegliano il maggior interesse cognitivo dell'allievo. In questa direzione si deve rinnovare continuamente l'attività docente al fine di ottenere un allievo più critico, creativo ed innovatore, quando si auspica che dovrà agire (sia nell'immediato, sia in futuro come adulto) all'interno della società. La competenza è dunque vista come qualche cosa che permette di migliorare la qualità di vita della società.
- L'interesse del soggetto sta nel tentativo di soddisfare le sue proprie necessità e nello studio – analisi – conoscenza delle proprietà dell'oggetto (inteso non solo in senso fisico) che si ritiene possa soddisfarle. L'importanza di porre l'allievo in contatto con gli oggetti che, allo stesso tempo, soddisfano le necessità, creandone delle nuove, evidenzia in un primo momento gli interessi individuali ed in un secondo momento provoca la incorporazione nel quotidiano di soggetti utili alla società. È così che la valorizzazione del soggetto per i successi ottenuti, lo porta a cercare nuove fonti di sapere. La mancata canalizzazione adeguata di questo interesse può indurre l'allievo alla ricerca del riconoscimento in attività non desiderate dalla società [attività che esigono scarsa preparazione cognitiva ma che si presentano come altamente redditizie sia in termini monetari sia in termini di immagine]. Se si vuol seguire questo tipo di motivazione, l'insuccesso scolastico deve essere trattato con professionalità, da parte dell'insegnante, dunque soprattutto non deve frustrare né immobilizzare lo sviluppo dello studente verso competenze significative. La competenza appare qui come valorizzazione specifica dell'essere umano come persona.
- Una terza tendenza considera l'importanza della motivazione come qualche cosa di intrinseco, specifico, tipico dell'essere umano, una vera e propria propensione naturale. La necessità di sapere, di conoscere, di apprendere è sufficiente per attivare la motivazione; è il desiderio di migliorare l'"io", che tiene attiva la motivazione. Si tratta dunque di un piacere intrinseco. In questa

ottica, la conoscenza di per sé stessa è la fonte che attiva il desiderio di apprendere in contesti ogni volta più complessi. La natura dell'essere umano si impone su tutto ed a dispetto di tutto, perché dentro di essa si trova già insita la necessità di conoscere, di interpretare con maggiore chiarezza il mondo che ci circonda. In questa posizione, la competenza è l'espressione stessa di questa propensione al conoscere ed all'uso delle conoscenze raggiunte per procedere nella stessa direzione, verso nuove conoscenze.

2. La *competenza in Matematica* e la *competenza matematica*

Questo è un punto centrale, sul quale non si fa mai abbastanza chiarezza. Voglio proporre allora una distinzione tra due accezioni del termine *competenza*, la competenza in Matematica e la competenza matematica, distinzione alla quale invito d'ora in avanti a fare riferimento, commentandola e definendola sempre meglio.
La *competenza in Matematica* si centra nella disciplina Matematica, riconosciuta come scienza costituita, come oggetto proprio, specifico, di conoscenza. L'allievo entra in contatto con saperi specifici, saperi che la società ha inglobato nelle conoscenza riconosciute come base per un dignitoso ingresso nel suo interno; si appropria di una parte di tali saperi, tanto formalmente quanto informalmente. Si riconosce così l'esistenza di un dominio concettuale ed affettivo che media tra l'allievo stesso e la Matematica. La competenza è qui vista all'interno dello specifico ambito scolare.
Per alcuni autori (Kulm, 1986), raggiungere la competenza in questo senso ha come base i concetti trattati nei primi anni della scuola media; ma questo stesso periodo può essere anche quello in cui questa competenza si annulla, dato che inizia lo studio della Matematica con un grande carico di apparato formale. Questa situazione, se non è ben gestita dall'insegnante, può dunque favorire il processo di *scolarizzazione* (D'Amore, 1999b), portando l'allievo a rinunciare a farsi carico del proprio apprendimento ed a rifugiarsi solo in ciò che gli propone l'insegnante. Questa competenza è individuale; però, se si lavora nel paradigma della dicotomia validazione - socializzazione, si può pensare in una competenza in Matematica anche a livello di gruppo classe.
La *competenza matematica* si riconosce quando un individuo vede, interpreta e si comporta nel mondo in un senso matematico. L'atteggiamento analitico o sintetico, con il quale alcune persone affrontano situazioni problematiche, è un esempio di questo tipo di competenza. Ci sono buoni risolutori di problemi che possono riconoscere, delimitare e risolvere situazioni problematiche; il che,

viceversa, a volte, non è facile da evidenziare in persone che trattano bene, per esempio, algoritmi. Aspetti come il gusto e la valorizzazione della Matematica, sono alcuni degli aspetti utili per orientare il raggiungimento della competenza matematica.

Sia nella competenza in Matematica come nella competenza matematica, si evidenziano dunque tre aspetti:

- il cognitivo: conoscenza della disciplina
- l'affettivo: disposizione, volontà, desiderio di rispondere ad una sollecitazione esterna o interna
- la tendenza di azione: persistenza, continuità, sollecitudine.

3. Modi d'essere delle competenze

Spesso usiamo il modo di dire "competenze in Matematica". Ma questo modo semplicistico, nasconde in realtà una questione complessa.

Possiamo parlare di diverse competenze in Matematica o, se si preferisce, di diverse componenti della competenza in Matematica; quanto meno abbiamo in lista:

- il dominio della noetica, cioè dell'apprendimento concettuale in matematica;
- il dominio algoritmico, spesso trascurato;
- il dominio degli aspetti semiotici (scelta dei tratti rappresentativi dell'oggetto da rappresentare, trattamento e conversione delle rappresentazioni semiotiche nei vari registri,…) (D'Amore, 2001);
- il dominio che concerne la risoluzione di problemi (approssimare, proporre strategie, scegliere l'algoritmo adatto, confrontare strategie,…);
- il dominio della problematica che concerne il grande capitolo della cosiddetta "comunicazione matematica" (giustificazione, argomentazione, dimostrazione,…)
- …

Ciascuna di queste componenti si evidenzia in modo differente, anche a seconda del livello scolare, il quale è a sua volta influenzato dalla cultura e dalle attese sociali.

Ne segue che non ci sono competenze per ciascun livello scolastico, ma diversi livelli per ogni competenza. Questi "livelli" possono anche, per comodità, essere identificati con quelli classici scolastici (ma solo per comodità).

4. La figura del docente, se si vuol raggiungere lo sviluppo della competenza nell'allievo

Ora devo pormi il problema della figura dell'insegnante, qualora si sia fatta una scelta finale che vede lo studente come colui che deve raggiungere competenza e non solo conoscenza (mi servo di: Fandiño Pinilla, 1999a, b).
L'insegnante deve avere prima di tutto lui stesso competenza in Matematica ed essere cosciente della problematica della competenza matematica.
Oltre alla conoscenza della disciplina che insegna e della teoria della didattica specifica di quella disciplina, gli si deve chiedere una volontà ed una capacità comunicative reali, per esempio quelle di saper / voler spiegare il mondo da un punto di vista matematico, senza forzarne i problemi, facendo sì che la Matematica vi appaia in modo naturale.
La costante nell'azione dell'insegnante deve essere la rottura dell'equilibrio che si genera come punto di partenza per l'apprendimento, canalizzata nella direzione adeguata affinché essa si costituisca realmente in un apprendimento da parte dello studente. Lo scopo è quello di proporre situazioni di apprendimento che superino la risposta ad un continuo interrogatorio (scritto o orale, in modalità diverse) e si convertano invece nella soddisfazione di una spontanea valorizzazione ed evidenziazione della propensione verso necessità, gusto, desiderio di sapere da parte dell'allievo. Il "cambio" qualitativo dei processi di insegnamento / apprendimento indirizzati verso il raggiungimento della competenza, sta nella trasformazione della docenza in un'attività dinamica, comunicativa, dimenticando la logica della prassi dell'istruzione che per lungo tempo ha identificato l'educazione scolastica.
Per giungere ad un apprendimento che si converta in una competenza del primo tipo (competenza in Matematica) da parte dell'allievo, è necessario un reiterato incontro dell'insegnante con l'oggetto di studio, affrontandolo ogni volta con nuovi elementi, nuovi procedimenti, approfondendolo e legandolo con altri saperi (disciplinari, di altre discipline, ma anche non disciplinari). Una volta raggiunta questa competenza, occorre proporre situazioni che incentivino la competenza matematica.
Detto in altro modo, l'azione didattica non può essere lineare né può banalmente ridursi ad una sequenza di fasi che vanno dal semplice al complesso, dato che in questo modo prende forza l'idea di una scala didattica forzata e troppo rigida, quella che in passato si faceva partire dai prerequisiti (che, all'interno di una teoria della competenza, non sono certo il primo dei problemi).

Si richiede una serie di nuovi e reiterati incontri con il sapere matematico, nei quali la riarticolazione sia proposta come parte di questo sapere e non come una somma di saperi nei quali la responsabilità di questa integrazione stia solo nel far… incontrare lo studente con gli scarsi elementi che offre la disciplina a livello scolare.

5. Sviluppare competenza matematica

Tenterò di riassumere in pochi punti (non esaustivi) la metodologia che in qualche modo privilegia lo sviluppo della competenza matematica, a mio avviso.

- Lavorare su situazioni problematiche prese dalla realtà, sulla base di quel che ho detto poco sopra; occorre ovviamente scegliere situazioni a-didattiche, a partire da situazioni prese in prestito dalla realtà e che rispondano ad un problema sentito dall'allievo. Non si vuole qui ritornare alla superata discussione sul reale come fonte di ispirazione dei problemi, ma al fatto che ogni allievo ha una *sua* realtà alla quale tiene e coinvolgendo la quale egli cessa di pensare alla scuola come ad un luogo avulso da interessi, ma anzi come luogo che gli permette di usare conoscenze in modalità vincenti, con successo anche esogeno e non solo endogeno.
- Organizzare lo sviluppo curricolare sulla base dei processi e non solo dei prodotti. Si è oramai accettato il fatto che è attraverso il processo che si costruisce un sapere; questa intenzione curricolare si evidenzia poi nella valutazione, dato che questa deve essere in corrispondenza con l'attività sviluppata nell'aula; non è possibile, per esempio, valutare lo studente in modo tradizionale quando si vuole lavorare su competenze invece che su conoscenze (Fandiño Pinilla, 1999a).
- Proporre lavoro di aula sufficientemente ricco e stimolante, affinché l'elaborazione mentale che si richiede per affrontare il lavoro prosegua fuori dal tempo e dallo spazio scolastici (Barón, Lotero, Fandiño Pinilla, Sánchez, 1999).
- Stimolare la creatività e l'immaginazione degli studenti mediante diverse attività matematiche, tenendo presente che non sono i contenuti in sé stessi a costituire la meta da raggiungere tramite la scuola, ma che sono la base per costruzioni di livello più alto.
- Riconoscere le concezioni che l'allievo ha elaborato in relazione alla Matematica, il suo insegnamento ed il suo apprendimento; un'idea stereotipata della Matematica e della forma in cui la si presenta in aula, si interpongono con un lavoro destinato allo sviluppo della competenza. Il lavoro matematico ha bisogno di rinforzarsi con attività che all'allievo piacciano (in senso lato) e

che avverta come qualche cosa di necessario per la sua azione nella società dunque non solo endogena, ma anche esogena. Questo punto è emerso con forza in più occasioni e per diversi motivi.

6. Cambi concettuali nell'azione didattica che comporta il voler far sviluppare la competenza matematica.

Sul curricolo

Decidere che la propria azione didattica ha come scopo quello di far sviluppare una competenza matematica da parte dei propri allievi, comporta vari cambi nel curricolo. Per prima cosa, ed è ovvio, occorre progettare un curricolo avente come direzione quella del raggiungimento di competenze. Se guardiamo a come stanno le cose ora, in vari Paesi, si vede come la corsa dell'insegnante a "terminare" il programma come scopo curricolare non permetta allo studente di costruire competenze, né in Matematica, né tanto meno matematiche. Occorre evitare l'abuso nella utilizzazione di regole, della simbolizzazione, dell'astrazione, della memorizzazione per brevi periodi, di attività decontestualizzate rispetto al mondo esterno alla scuola, al mondo reale,… che poco a poco portano l'allievo ad un processo di scolarizzazione.
Se l'azione didattica è tesa a far sviluppare nell'allievo competenze matematiche, il curricolo va ridisegnato su misura per questo scopo specifico. A questo punto ho già dedicato vari paragrafi precedenti, molti dei lavori citati in bibliografia ed altri.

Sulla valutazione

Come ho già detto e come esplicitamente ripeto, sulla base della complessità racchiusa dal termine "competenza", e che finalmente comincia ad apparire in questo ed in tanti altri studi, trae origine il fatto che la valutazione di competenze non può ridursi ad un test per verificare la padronanza in qualche cosa di specifico. La valutazione in vista di una didattica volta a far raggiungere competenze si presenta come un processo di analisi dell'aula, di tutte le componenti dell'aula, come ho già scritto qualche paragrafo prima.

Sui contenuti della formazione

Occorre rivedere daccapo i corsi di laurea per la formazione degli insegnanti elementari ed i corsi di specializzazione per la formazione degli insegnanti di scuola secondaria. Bisogna stabilire, oltre alle norme ufficiali della formazione disciplinare, una formazione didattica significativa e vera, per esempio garantita da un legame esplicito tra queste attività di formazione ed i gruppi di ricerca didattica.[16] Occorre creare corsi di "aggiornamento" dei docenti in servizio nei quali si evidenzino e si discutano i risultati della ricerca (come si fa, per esempio, con i chirurghi), ma anche i fondamenti epistemologici e didattici dei saperi in gioco.

Sui materiali "didattici"

Occorrerebbe studiare bene le condizioni di realizzazione dei libri di testo, dei mezzi di comunicazione, dei vari strumenti a disposizione degli insegnanti di Matematica per la loro azione didattica. Si pensi, per esempio, alla scuola elementare ed ai danni che l'uso scriteriato e oramai insensato di certi materiali "didattici" ha fatto, nonostante l'esplicita denuncia dei ricercatori perfino su riviste di larga diffusione (D'Amore, 2002). Occorre elaborare o almeno raccomandare agli insegnanti materiali e laboratori che offrano significativo appoggio didattico, ed insegnare ad essere comunque critici nei confronti di questi strumenti. Occorre creare spazi nei quali si possano discutere le metodologie implementate.

Ma la cosa a mio avviso più importante, è il necessario cambio della funzione e della visione che la società attribuisce alla Matematica. Non credo che occorra insistere su questo punto, perché l'hanno già fatto diversi altri autori. Stante la visione e la funzione che la società generalmente attribuisce alla Matematica, importante (con giustificazioni a vuoto) sì ma a-culturale, diventa difficile ogni altro discorso sui tentativi di cambio detti sopra.

7. Che cosa si valuta, quando si parla di "valutazione delle competenze"?

Voglio subito avvertire, per correttezza, che questa domanda resterà tale perché ogni risposta è da considerarsi prematura, nonostante gli anni di esperienza in vari Paesi.

Una risposta complessa, come merita la complessità del tema, può essere ritrovata in Fandiño Pinilla (2002). Più volte, qui è stato messo in evidenza come la valutazione di competenze non può ridursi ad un test usuale (orale, scritto,…) per verificare la padronanza di qualche cosa di specifico, ma che si presenta invece come un aspetto di grande importanza per lo sviluppo di ciascuno degli aspetti legati alla

[16] In vari Paesi, c'è coincidenza, laddove possibile, tra queste due attività, nel senso che la formazione *didattica* dei futuri insegnanti di Matematica è affidata proprio ai gruppi di ricerca in Didattica della Matematica. In Italia, la coincidenza, quando c'è, sembra essere non voluta da un punto di vista legislativo, ma fattuale: chi si interessa della formazione è, di solito, chi fa ricerca nel campo.

conoscenza nella sue varie forme isolatamente, ma anche nella loro interazione.
La valutazione deve essere vista esclusivamente come il processo di analisi dell'aula, di tutte le componenti dell'aula: il curricolo, l'efficacia dell'azione dell'insegnante, l'allievo.
Qui, più che altrove, ha senso evidenziare che l'allievo è tanto responsabile del processo di valutazione quanto lo sono l'insegnante o la società, se è vero che è l'allievo competente ad essere giudicato, dunque ad essere giudice e giudicato all'un tempo. Non può essere che così; d'altra parte, chi meglio di una persona competente è in grado di valutare la propria effettiva competenza?

Bibliografia

Barón C., Lotero M., Fandiño Pinilla M.I., Sánchez N. (1999). Proyecto de Aula. In: AA. VV: (1999). *Matemáticas Escolares Asistidas por Computador*. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Collana: Matemáticas Escolares. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-24 (Modulo 7).

D'Amore B. (1999a). *Elementi di didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (1999b). Scolarizzazione del sapere e delle relazioni: effetti sull'apprendimento della matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate*. 22A, 3, 1999, 247-276.

D'Amore B. (2001). Concettualizzazione, registri di rappresentazioni semiotiche e noetica. *La matematica e la sua didattica*. 2, 150-173.

D'Amore B. (2002). Basta con le cianfrusaglie. *La Vita Scolastica*. 8, 14-18.

Fandiño Pinilla M. I. (1999a). Alumnos competentes; objeto de formación (evaluación) del profesor de matemáticas. In: *Actas del XVI Coloquio Distrital de Matemáticas y Estadística*. Bogotà, 29 novembre, 3 dicembre 1999. Università Nazionale, Università Pedagogica, Università Distrettuale. Bogotà. 32-38.

Fandiño Pinilla M. I. (1999b). Evaluación. In: AA. VV: (1999). *Matemáticas Escolares Asistidas por Computador*. Proyecto curricular de Licenciatura en Matemáticas. Collana: Matemáticas Escolares. Bogotá: Universidad Distrital "Francisco José de Caldas". 1-19 (Modulo 6).

Fandiño Pinilla M. I. (2002). *Curricolo e valutazione in matematica*. Bologna: Pitagora.

Kulm G. (1986). Investigación en torno a las Actitudes matemáticas. In: *Antología del Seminario de Investigación Educativa*. Vol. I. México: UPN.

La problematica della trasposizione didattica in Didattica della Matematica: il "caso" emblematico delle frazioni[17] [18]

Martha Isabel Fandiño Pinilla

NRD - Dipartimento di Matematica – Università di Bologna
ASP – Alta Scuola Pedagogica - Locarno
MESCUD – Università Distrettuale Fr. José de Caldas – Bogotà

Pubblicato in: Fandiño Pinilla M.I. (2002). La problematica della trasposizione didattica in Didattica della Matematica: il "caso" esemplare delle frazioni. In: Callegarin G. (ed.) (2002). *La Matematica è difficile?* Atti del 2° Convegno Nazionale omonimo, Adria (Ro), 5 ottobre 2002. Bologna: Pitagora. 91-103.

Summary. *The problem of didactic transposition is discussed in detail, as an essential stage in teaching practice. In particular we study the case of the relationship of part/whole in the learning of fractions. This example is used as a paradigm to demonstrate the complexity of the subject and the crucial importance of "didactic engineering".*

Sunto. *Si discute in dettaglio del problema della trasposizione didattica, come momento essenziale della prassi scolastica. In particolare si studia il caso della relazione parte/tutto nell'apprendimento della frazione. Si usa tale esempio in modo paradigmatico per mostrare la complessità del tema e l'importanza decisiva della ingegneria didattica.*

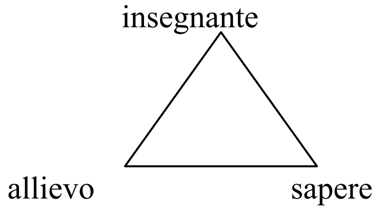
---

[17] Questo articolo costituisce una rielaborazione del testo della conferenza che l'autrice ha dato in occasione della "Fine Settimana della Matematica n° 9 per Insegnanti della Scuola di Base" a Castel San Pietro Terme (Bologna, Italia), nei giorni 8 e 9 settembre 2001. Queste giornate di studio sono organizzate dal Nucleo di Ricerca in Didattica della Matematica di Bologna e dall'Assessorato alla Cultura del Comune di Castel San Pietro.

[18] Il lavoro è svolto nell'àmbito del Progetto di Ricerca dell'Unità di Bologna: «*Ricerche sul funzionamento del sistema: allievo-insegnante-sapere*», inserito nel Programma di Ricerca Nazionale: «*Difficoltà in matematica: strumenti per osservare, interpretare, intervenire*», cofinanziato con fondi M.I.U.R.

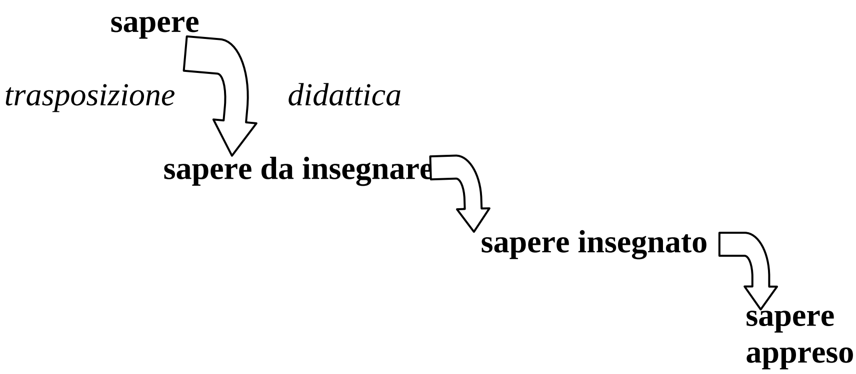
1. Trasposizione didattica

È argomento oramai diffuso tra tutti coloro che si occupano di Didattica della matematica il seguente. Nel cosiddetto *triangolo della didattica*,



il "sapere" cui si fa riferimento è il sapere accademico, quello universitario, quello della ricerca, quello degli scienziati. Ma compito principale dell'insegnante è la cosiddetta *trasposizione didattica*, una sorta di *reinterpretazione funzionale* del sapere, funzionale alla scuola, al sapere dei suoi allievi, al curricolo, al livello scolastico, alle attese della società, alla tradizione etc. (D'Amore, 1999)

La trasposizione trasforma dapprima il *sapere* in *sapere da insegnare* e poi in *sapere insegnato* (sarebbe utopistico ed ingenuo pensare che il *sapere insegnato* coincida con quello *appreso*...):



Riflettere su questi "passaggi" aiuta molto nella comprensione della realtà scolastica. Sembra tuttavia che una scarsa dimestichezza negli studi di Didattica ostacoli tale riflessione, cosicché si ritiene opportuno proporre ogniqualvolta possibile esempi concreti che possano far luce su questa problematica: che differenza c'è tra *sapere* e *sapere da insegnare*?

Ci limiteremo qui solo ad un esempio, con alcuni riferimenti però anche al *sapere insegnato* e, di sfuggita, al *sapere appreso*. E ci limitiamo al solo concetto di numero. La scelta è di comodo: tale concetto e la sua costruzione fanno parte della Matematica portata in aula fin dalla più tenera età e fino alla fine della carriera scolastica, anche all'Università ed oltre...

2. Il numero

In Matematica il numero è ben definito (per esempio, il numero naturale è definito tramite gli assiomi di Peano o tramite la costruzione di Von Neumann o anche in altre modalità); tuttavia, in *nessun* livello scolastico si tratta *così* l'introduzione a questo concetto.
Viene dunque spontaneo affrontare il problema della trasposizione del concetto di numero:

- Che cosa del concetto di numero deve essere oggetto della didattica?
- Quali immagini di numero sono opportune ai vari livelli scolastici, per esempio nella Scuola Elementare?

Ci sono questioni tipiche, a questo proposito, oramai prassi consolidata; nella scuola si trattano ovviamente aspetti del numero che non fanno parte del sapere accademico e che tuttavia sono considerati importanti, utili, necessari, irrinunciabili del sapere scolastico, quello atteso nelle aule delle scuole; per esempio:

- il numero come oggetto del contare
- il numero come strumento del misurare
- il numero-etichetta, come strumento per identificare, per indicare
- ...

Fra tutti gli aspetti "scolastici" del numero, ad un certo punto appaiono i numeri "frazionari"; tali "oggetti" non esistono nel sapere accademico, nel quale al loro posto esistono i "numeri razionali" che sono definiti come le classi di equivalenza $[(a,b)]$ ottenute in $N\times(N-\{0\})$ grazie alla relazione d'equivalenza: $[(a,b)\cong(c,d)]\Leftrightarrow(ad=bc)$.
Nel sapere accademico non c'è posto per le frazioni, per i numeri frazionari, dato che non ce n'è bisogno. Se si potesse portare a scuola il sapere accademico o una sua parte, quasi non ci sarebbero problemi... a parte l'impossibilità da parte degli allievi di comprendere l'argomento, per ovvii ostacoli ontogenetici.
Dunque, nel sapere scolastico ci sono argomenti che sono attesi, opportuni, dovuti e che riempiono le aule ed i libri di testo, argomenti che sono tipici, specifici, opportuni nel sapere scolastico, ma assenti nel sapere accademico.

Che cos'è dunque questo "numero frazionario"?

In realtà, l'oggetto matematico "numero frazionario" può essere pensato come l'insieme delle sue interpretazioni o rappresentazioni, al plurale.
Qui, più che altrove, dovremmo puntare tutta la nostra attenzione sulla delicata e decisiva questione del passaggio dalla pluralità di rappresentazioni nei vari registri semiotici, alla noetica, cioè all'apprendimento concettuale (che, ricordando Duval, 1993, 1995 , è un percorso obbligato).
Non c'è dunque un'*unica* interpretazione o rappresentazione del numero frazionario, dato che ne esistono invece *molte* che fanno riferimento sia alla realtà oggettiva concreta (anche extrascolastica) sia alla realtà scolastica.
Eccone un elenco, piuttosto incompleto, tratto dalla consuetudine didattica.

<u>Frazione come relazione parte/tutto</u>:

- parte di un insieme o raccolta di oggetti distinti: 3/4 di 12 oggetti è 9 oggetti
- misura lineare: inserire ¾ sulla retta numerica vuol dire misurare ¾ di una determinata unità stabilita; oppure: ¾ della lunghezza di un segmento è una certa lunghezza, minore, di un segmento che è una parte del primo
- area: colorare i ¾ di un dato rettangolo:
- …

<u>Frazione come rapporto</u>:
la frazione *a*/*b* esprime il rapporto tra *a* e *b* in diverse situazioni:

- scale
- proporzionalità
- percentuali
- …

<u>Frazione come divisione</u>:
ricerca del quoziente, il che comporta competenze su:

- numeri con la virgola
- Sistema Metrico Decimale
- …

<u>Frazione come espressione della probabilità</u>:

- misura della probabilità di un evento

- presentazione di situazioni su cui fare ipotesi: Su 10 persone, 3 hanno gli occhiali; qual è la probabilità che, scegliendo a caso una persona, essa abbia gli occhiali?
- …

<u>Frazione come operatore</u>:
• Esempio: I 2/5 di 3/4 sono 3/10: non è una vera misura, né una vera divisione.

Una volta deciso che i punti precedenti costituiscono in un determinato momento della carriera scolastica un *sapere da insegnare*, sorge il problema dell'ingegneria didattica: come insegnare questi concetti? E, soprattutto: come far sì che gli studenti li apprendano?

Limitiamoci ora all'esempio della frazione come relazione parte/tutto; quali sono le domande che sorgono al docente quando decide di affrontare questo argomento?
Conviene prima lavorare nel continuo (area e misura) e poi nel discreto (parte di un insieme)?

3. Preliminari sull'apprendimento del numero frazionario come parte/tutto

Prima di proseguire, è necessario cercare di identificare le caratteristiche della struttura cognitiva che permette di maneggiare la nozione di "parte/tutto" Alcune delle abilità necessarie per dominare questa nozione sono state studiate dapprima da Piaget, Inhelder, Szeminska (1960) (cit. in Llinares Ciscar, Sánchez Garcia, 1996), precisando che la nozione di frazione nel suo aspetto parte/tutto (in contesti continui) si basa su 7 attributi:
- un tutto che è però scomponibile in elementi o parti tra loro separabili
- tale separazione si può fare in un numero determinato di parti costituenti
- le suddivisioni nel loro insieme completano il tutto
- il numero delle parti non coincide con il numero dei "tagli"
- le parti devono essere uguali tra loro (congruenti, se l'unità lo permette)
- ciascuna delle parti così ottenute può a sua volta essere intesa come una nuova unità
- il tutto si conserva, anche se diviso in parti.

Payne (1976) (cit. in Llinares Ciscar, Sánchez Garcia, 1996), considera invece basilari tre principi per l'apprendimento della nozione di frazione come parte/tutto, e cioè che gli allievi:

- abbiano un controllo simbolico delle frazioni
- considerino la nozione parte/tutto sia in contesti continui sia in contesti discreti
- facciano suddivisioni equivalenti (per esempio congruenti, se l'unità lo permette)

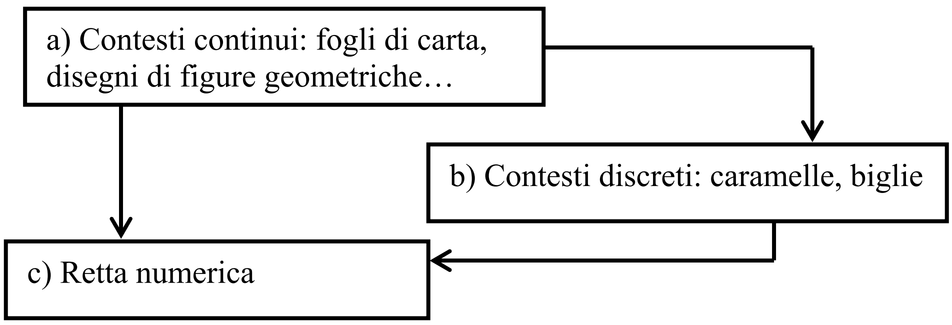
Nel contesto dell'apprendimento di questo concetto, più che in altri, è importante far sì che lo studente NON passi dalle immagini ai modelli troppo presto e soprattutto che non si faccia modelli solo di uno degli aspetti parziali detti. (D'Amore, 1999)

4. Insegnamento/apprendimento della frazione parte/tutto

Torniamo dunque alle domande che ci eravamo posti alla fine del paragrafo 2.

Le esperienze internazionali di *ingegneria didattica* degli ultimi 30 anni mostrano ampiamente che conviene partire dall'immagine della frazione come area, e trattare a lungo solo frazioni minori dell'unità.

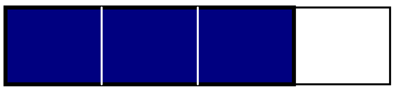
Schematizzando questa idea:



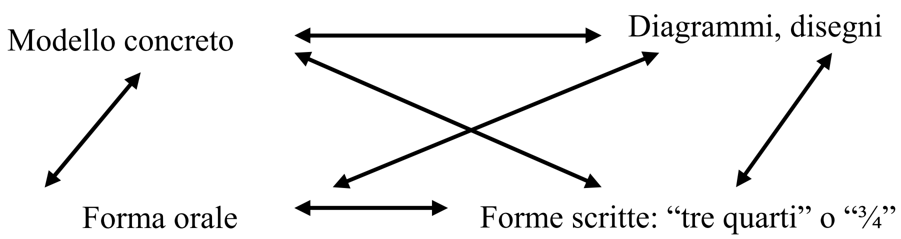
Questa "scoperta" sostanzialmente coincide con l'attività più diffusa nel mondo della scuola, nel senso che tutti gli insegnanti, più o meno, partono così. La "novità", se così vogliamo chiamarla, sta nel fatto che risulta inoltre ampiamente dimostrato che occorre dare una pluralità, il più possibile estesa, di *immagini* della frazione, mentre esistono ancora insegnanti o testi che si limitano ad una sola o che ne privilegiano una sola.

È importante far notare che cosa si stia evidenziando, tenendo fermo il registro semiotico e cambiando però rappresentazioni (questo tipo di *trasformazione semiotica* si chiama: *trattamento*) (Duval, 1993, 1995; D'Amore, 2001b, specie alle pagine 321-358):

- dire ad alta voce "tre quarti"
- scrivere sulla lavagna o sul quaderno "tre quarti"
- in cifre "3/4"
- colorare:



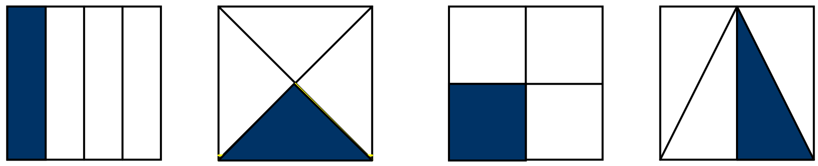
sono tutte forme diverse di rappresentazione semiotica. Le forme diverse di rappresentazione si posso indicare nel seguente schema nel quale si introduce come ulteriore forma di rappresentazione quella tratta dal mondo reale:



Le rappresentazioni delle situazioni che portano con sé implicitamente la nozione di frazione attraverso diagrammi, disegni, schemi, possono essere presentate agli allievi con l'intenzione di dar loro un *modello di appoggio* che permetta di passare da situazioni concrete o intuitive ad un livello più formale come potrebbe essere il lavoro direttamente numerico.
Dal gioco e da attività del tipo "*Tu fai le parti ed io scelgo*" (nelle quali si conduce l'allievo a suddividere diversi materiali, cercando di far sì che le parti siano congruenti), si può spingere a mettere in rilievo i criteri che gli studenti usano per verificare appunto che dette parti siano "uguali"; la letteratura internazionale su questo tema è vastissima.

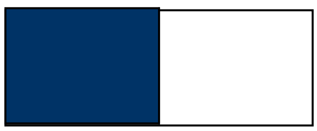
Vediamo esempi concreti.

Nei 4 esempi seguenti, che rappresentano tutti ¼, si deve evidenziare esplicitamente che la parte colorata è la quarta parte dell'area dello *stesso* quadrato:



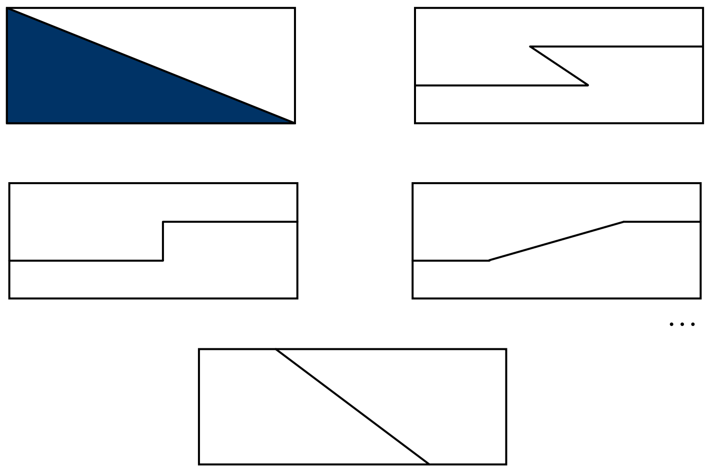
È bene usare più situazioni ed affidare agli stessi studenti la gestione del compito. Per esempio, le metà dell'area di un rettangolo non sono solo:

questa



e questa

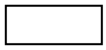
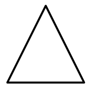
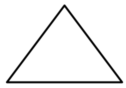
ma infinite altre:



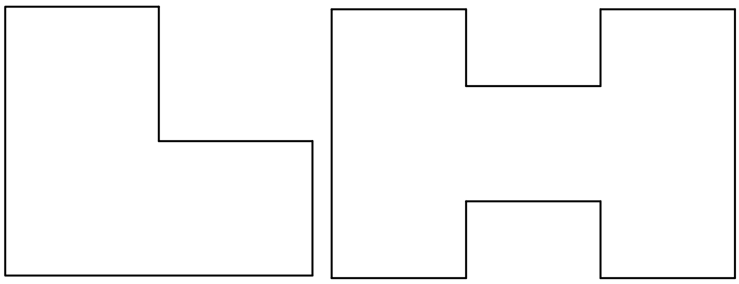
…

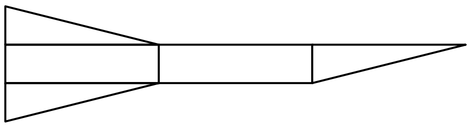
È necessario che tutte le attività che hanno come obiettivo finale la formalizzazione della nozione di frazione vincolino l'esistenza delle frazioni all'unità: la "misura" della metà di "un qualche cosa" è funzione di questo "qualche cosa"; ciò evita che gli allievi ignorino il contesto nel quale si sta lavorando e che questo successivamente si converta in un ostacolo per la nozione di frazione in un contesto discreto.

È altrettanto importante non intendere il frazionamento dell’unità in maniera unidirezionale, cioè non solo chiedere di colorare i ¾ di una determinata figura, ma anche proporre problemi del tipo inverso:

	Forma della unità	
	Rettangolo	Altra figura
Si parte da frazioni unitarie	 Questo è ¼ di una figura; qual è la figura?	 Questo è ¼ di una figura; qual è la figura?
Si parte da frazioni qualsiasi	 Questo è i ¾ di una figura; qual è la figura?	 Questo è i $\frac{2}{5}$ di una figura; qual è la figura

È bene non cadere in stereotipi o figure sclerotizzate; per esempio, non solo “trovare i ¾ di” figure compatte e convesse, ma anche di figure più complesse, per esempio concave come:





5. Frazioni come misura e altre considerazioni generali

Passiamo ora alla frazione come misura e facciamo però riferimento solo alla cosiddetta “linea dei numeri”.

Una cosa è individuare sulla linea dei numeri la frazione ¾ avendo preso come misura di riferimento l'unità, altra cosa è prendere i ¾ di 2 e segnare sulla linea dei numeri, appunto, i ¾ di 2.
Così, la metà della distanza Roma-Innsbruck e la metà della distanza Bressanone-Innsbruck, pur essendo entrambe "una metà" di qualche cosa, sono tra loro ben diverse, perché sono frazioni di misure diverse, in ciascun caso considerate come l'unità. Dunque: non tutte le metà sono uguali dipende di che cosa sono ciascuna la metà!

Sia nel numero frazionario come area, sia nel numero frazionario come misura lineare, tutti sappiamo bene che è sempre possibile trovare una data frazione. Per esempio, si sa che è possibile trovare i 22/25 di area di una data figura o di una data distanza, anche se fisicamente (per esempio con il disegno) la cosa potrebbe risultare complicata (dividere una figura in 25 parti uguali, e poi prenderne 22, non sempre è tanto agevole).
Ma vi sono frazioni, intese come parte di un insieme-tutto, per le quali è impossibile trovare un'immagine significativa. Per esempio, se l'insieme di partenza è formato da 5 persone, è impossibile pensare e rappresentare in modo ingenuamente realistico i ¾ di tale insieme.
Diventa allora anzi per esempio interessante chiedersi, rispetto a casi concreti: Per quali frazioni ha *senso* porsi domande, di fronte ad una raccolta di 5 persone? Per esempio ha senso prenderne 2/5, 6/10 (per quanto sia assurdo applicare il primo passo intuitivamente appreso "dividere per 10"), 1/5 etc...?

Nella relazione parte/tutto, in ciascuno dei casi visti: area (continua), misura lineare (continua), parte di un insieme (discreta), vi sono elementi che contribuiscono alla formazione dell'idea di numero frazionario e tuttavia vi sono costituenti del concetto generale che non si riescono a *vedere* in ciascuno di essi.
Per esempio, nel primo possiamo anche dimenticare ogni riferimento all'unità di misura perché qualsiasi frazione m/n venga richiesta (con $m<n$, m ed n numeri naturali ed ovviamente $n\neq 0$), essa certamente si può rappresentare; mentre questo non capita né nel II caso (dove l'unità è fondamentale) né nel III caso (dove il numero di elementi dell'insieme di riferimento è condizionante).

6. Uguaglianza tra frazioni

C'è un aspetto fondamentale che riguarda i numeri frazionari ed è l'uguaglianza tra frazioni. Noi vogliamo che i nostri allievi, alla fine, sappiano riconoscere che: ½ = 2/4 = 3/6 = ... e che sappiano trovare altre frazioni uguali (c'è chi dice "equivalenti", ma poi usa il segno "=").

Ora, questa catena di uguaglianze infinita ha senso per i casi continui (area e misura lineare), per i quali dire ½ o dire 3/6 è la stessa cosa… Ma cessa di avere senso per i casi discreti, giacché può esistere ½ di una raccolta di 10 persone, ma diventa oltremodo complesso giustificarne i 3/6 in modo intuitivo, senza dare già per acquisito che vale l'uguaglianza detta sopra e quindi lavorare direttamente sulla frazione… più comoda.[19]

Qui si deve far notare come il modello concreto si converte in un ostacolo nell'apprendimento, dato che: per trovare frazioni equivalenti con numeratore e denominatore *più grandi*, l'azione aritmetica o concreta reale è di *dividere* ulteriormente l'unità. Per esempio, per passare da 2/3 a 4/6, l'unità (che era divisa in 3 parti) va idealmente divisa in più parti (6). Dunque, apparentemente, per arrivare a numeri (numeratore e denominatore) più grandi, bisogna dividere l'unità in parti più piccole.

Mentre la cosiddetta semplificazione, che è una riscrittura con numeri al numeratore ed al denominatore *più piccoli*, si ottiene facendo parti *più grandi*. Per esempio, per semplificare 4/6 ed ottenere 2/3, bisogna idealmente prendere le 6 parti nelle quali era divisa l'unità, a due a due, dunque bisogna prendere parti dell'unità più grandi.

Ciò costituisce un apparente paradosso, più evidente in quei Paesi dove la prassi scolastica ha portato gli insegnanti ad usare i seguenti nomi rispettivamente per le due attività descritte in precedenza: *ingrandire le frazioni* e *rimpicciolire le frazioni*. L'origine di queste denominazioni, certo non accademiche e assai discutibili, aveva certo lo scopo di dare l'idea dell'operazione da eseguire ed è finita invece per diventare motivo di ulteriore ostacolo. Fortunatamente non è in uso nella scuola di lingua italiana.

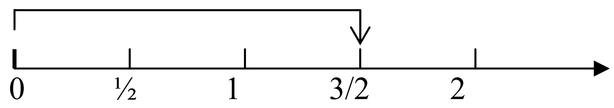
Inoltre bisogna osservare che tutto ciò ha modelli reali (quando ce li ha) solo nel continuo!

7. Frazioni "mostro" (da un punto di vista intuitivo)

Veniamo ora a frazioni-mostro, come le cosiddette "frazioni improprie" del tipo m/n con $m>n$ (e sempre, ovviamente, $n\neq0$).

[19] D'altra parte, una cosa è la semiotica (rappresentazione di un concetto in un dato registro semiotico), ben altra è la noetica (apprendimento di un concetto).

Nei casi "continui" è relativamente facile pensare ai 3/2 di una data figura o ai 3/2 di una data unità, da rappresentare sulla linea dei numeri:



anche se il modello unitario usuale (pizza o torta da dividere in parti uguali) non funziona più.

Ma se abbiamo un insieme di 4 persone, trovarne i 3/2 costituisce un ostacolo; anche se lo studente accetta che tale frazione rappresenti alla fine 6 persone, entra però in contrasto con immagini precedenti: cessa d'esser vero che le 4 persone (raccolta discreta) rappresentino l'unità.

Così, mentre ha senso la frazione 3/3 nel caso continuo, potrebbe non averlo nel caso discreto o, per lo meno, potrebbe non essere affatto evidente. Si pensi ai 3/3 di un insieme di 4 persone.

8. Conclusioni

Come dicevamo poco sopra, questo non è che un esempio, scelto (non a caso) tra quelli che si rivelano più difficili nell'apprendimento.

Una cosa è un *oggetto del sapere accademico* ben altro è un *oggetto del sapere da apprendere* in situazione scuola. La trasposizione didattica non è dunque, banalmente, come taluni credono, la scelta di una parte dei contenuti nei quali l'insegnante è esperto, è invece una vera e propria *trasformazione di sapere*.

Bibliografia

Sulle frazioni:

Llinares Ciscar S., Sánchez Garcia M.V. (1996). *Fracciones. La relación parte-todo*. Madrid: Sintesis.

Hart K. (1985). Le frazioni sono difficili. In: Artusi Chini L. (a cura di) (1985). *Numeri e operazioni nella scuola di base*. Bologna: Zanichelli-U.M.I. 134-143.

Sulla terminologia specifica della Didattica della matematica qui utilizzata:

D'Amore B. (1999). *Elementi di Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2001a). *Didattica della matematica*. Bologna: Pitagora.

Altri riferimenti:

D'Amore B. (2001b). *Scritti di Epistemologia Matematica. 1980-2001*. Bologna: Pitagora.

Duval R. (1993). Registres de représentations sémiotiques et fonctionnement cognitif de la pensée. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. ULP, IREM Strasbourg. 5, 37-65.

Duval R. (1995). *Sémiosis et pensée humaine. Registres sémiotiques et apprentisage intellectuels*. Berne: Peter Lang.

Diverse chiavi di lettura delle “misconcezioni”

Silvia Sbaragli

N.R.D. - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna - Italia
A.S.P. – Locarno – Svizzera

Pubblicato in: Sbaragli S. (2006). Diverse chiavi di lettura delle misconcezioni. *Rassegna.* Istituto Pedagogico di Bolzano. XIV, 29, 47-52.

Summary. *In this article we present a distinction between different kind of misconceptions: “avoidable” misconceptions that derive directly from knowledge didactical transposition, because they are just a direct consequence of teachers’ choices and the “unavoidable” ones that derive only indirectly from didactical transposition, since they are due to the need of starting from a certain knowledge in order to communicate, that at the beginning will never be exhaustive of the whole mathematical concept we are proposing.*

Sunto. *In questo articolo si presenta una distinzione tra i diversi tipi di misconcezioni: le misconcezioni “evitabili” che derivano direttamente dalla trasposizione didattica del sapere, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti e le “inevitabili” che derivano solo indirettamente dalla trasposizione didattica, essendo imputabili alla necessità di dover partire da un certo sapere per poter comunicare, sapere iniziale che non potrà mai essere esaustivo dell’intero concetto matematico che si vuol proporre.*

1. Introduzione

In questo articolo tratteremo uno dei termini più usati da decenni nella ricerca in Didattica della matematica, la parola “*misconcezione*”, inquadrandolo all’interno del panorama attuale di ricerca. L’interpretazione delle misconcezione a cui facciamo riferimento, si fonda sul ruolo costruttivo ed elaborato proposto da D’Amore per questo termine fin dagli anni ’90 (D’Amore, 1999): «Una misconcezione è un concetto errato e dunque costituisce genericamente un evento da evitare; essa però non va vista sempre come una situazione del tutto o certamente negativa: non è escluso che per poter raggiungere la costruzione di un concetto, si renda necessario passare attraverso una misconcezione momentanea, ma in corso di sistemazione»; tale scelta costruttiva permette di superare la scontata interpretazione negativa derivata classicamente dalla letteratura. Per un approfondimento di questa interpretazione si veda D'Amore, Sbaragli (2005).

In questa scelta, le misconcezioni sono considerate come momenti di passaggio da tenere sotto controllo dal punto di vista didattico, che non costituiscono un ostacolo all'apprendimento futuro degli allievi se sono legate ad *immagini deboli e instabile* del concetto, mentre rappresentano un ostacolo all'apprendimento se sono radicate a *forti e stabili modelli* di un concetto. Tutto ciò deriva dalla forza e stabilità del modello, caratteristiche che sono di per sé stesse di ostacolo ai futuri apprendimenti, rispetto alla dinamicità e instabilità delle immagini.

Questa proposta semantica è in analogia con ciò che fece Brousseau per il termine *ostacolo* a partire dal 1976 (Brousseau, 1976-1983), al quale diede un ruolo costruttivo in didattica della matematica, interpretandolo come una conoscenza che ha avuto successo in situazioni precedenti, ma che non "tiene" di fronte a situazioni nuove.

Le misconcezioni così intese sono state da noi distinte in due grandi categorie: *"inevitabili"* e *"evitabili"* (Sbaragli, 2005a); le prime sono quelle che *non dipendono direttamente dalla trasposizione didattica effettuata dal docente*, ma dalla necessità di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto, che non potrà mai essere esaustivo di ciò che si sta proponendo; mentre le seconde *dipendono proprio dalle scelte che l'insegnante prende per effettuare la trasposizione didattica* e che possono condizionare negativamente la formazione degli allievi.

Spiegheremo di seguito queste categorie presentando alcuni esempi.

2. L'"inevitabilità"

L'*"inevitabilità"* delle misconcezioni è intrinsecamente legata al pensiero di due autorevoli autori: Radford e Duval. Il primo sostiene che l'apprendimento è il processo di trasformazione attiva degli oggetti concettuali culturali in oggetti di coscienza che avviene tramite il processo di *oggettivazione*, inteso etimologicamente come «far mettere qualche cosa davanti a qualcuno in modo che lo possa percepire» (Radford, 2005). Questo processo di oggettivazione è particolarmente problematico in matematica, in quanto non è possibile accedere ai suoi oggetti neanche con il più accurato gesto ostensivo (D'Amore, 2003; Radford, 2002, 2005), ma è necessario ricorrere a *rappresentazioni* che Radford (2005) chiama *mezzi semiotici di*

oggettivazione del sapere legati alle pratiche sociali da cui hanno origine.
L'apprendimento concettuale si produce, dunque, nel luogo d'incontro tra la soggettività dell'allievo, i mezzi di oggettivazione socialmente costruiti e un sistema socio-culturale di significazioni (Radford, 2000, 2005). I mezzi semiotici di oggettivazione sono molteplici, e riguardano sia attività intellettuali sia sensoriali; essi comprendono l'attività sensoriale e cinestetica del corpo (azioni, gesti, movimento corporeo, …), gli artefatti (oggetti, strumenti tecnologici, …) e il ricorso a simboli matematici di vario tipo, ossia a diversi registri semiotici (algebrico, figurale, ...). In generale, i mezzi semiotici di oggettivazione rappresentano i segni che si utilizzano per rendere visibile un'intenzione e per condurre a termine un'azione.
L'*inevitabilità* dipende quindi dai mezzi semiotici di oggettivazione che gli insegnanti sono *costretti* a fornire per poter presentare un concetto, mezzi che conterranno informazioni "limitate e parassite" rispetto al concetto matematico che si vuole trattare.
Nell'affermare che nel presentare un concetto si è *costretti* a fare i conti con mezzi, siamo anche in linea con ciò che da anni sostiene Duval (1993): *non c'è noetica* (acquisizione concettuale di un oggetto) *senza semiotica* (rappresentazione realizzata per mezzo di segni) e la semiotica viene assunta come caratteristica necessaria per garantire il primo passo verso la noetica. Detto in altro modo: «La speciale situazione epistemologica della matematica, in confronto agli altri campi di conoscenza, conduce a conferire alle rappresentazioni semiotiche un ruolo fondamentale. In primo luogo esse sono il solo modo di accesso agli oggetti matematici» (Duval, 2006).
Di conseguenza, dovendo fare i conti con la semiotica di un concetto, potrebbe accadere che lo studente o addirittura, come vedremo nel paragrafo successivo, l'insegnante stesso, confonda la semiotica con la noetica, associando le caratteristiche peculiari della specifica rappresentazione al concetto stesso: «(…) Come dei soggetti in fase di apprendimento potrebbero non confondere gli oggetti matematici con le loro rappresentazioni semiotiche se essi non possono che avere relazione con le sole rappresentazioni semiotiche? L'impossibilità di un accesso diretto agli oggetti matematici, al di fuori di ogni rappresentazione semiotica, rende la confusione quasi *inevitabile*» (Duval, 1993). Idea perfettamente in linea con quel che scrive Radford (2005): «Il problema epistemologico si può sintetizzare nella domanda seguente: come possiamo giungere alla conoscenza di questi oggetti generali, dal momento che non abbiamo accesso a questi oggetti se non attraverso rappresentazioni che ci facciamo di essi?».

L’inevitabilità del passaggio attraverso la semiotica, rende quindi le *misconcezioni* che ne derivano *inevitabili*.

Da questo punto di vista, un esempio di misconcezione inevitabile proposto in Martini, Sbaragli (2005) è il seguente:
Quando un insegnante mostra per la prima volta ad un bambino di scuola dell’infanzia un modello di cubo rosso, di legno, di una certa dimensione e gli dice: *«Guarda, questo è un cubo»,* il bambino potrebbe credere che un cubo deve essere sempre rosso, di legno, di quelle determinate dimensioni. Tutte queste informazioni percettive che derivano dalla semiotica (rappresentazione proposta) e che sono avvertite come “parassite” nel contesto della Matematica, potrebbero essere invece quelle considerate dall’allievo come caratterizzanti il concetto del quale si sta parlando, essendo più facilmente percepibili e immediate.
Le misconcezioni che si possono essere create, derivano quindi solo *indirettamente* dalla *trasposizione didattica* effettuata dall’insegnante, in quanto sono una conseguenza dell’esigenza di dover dire e mostrare qualcosa per poter spiegare un concetto. In questo caso, le misconcezioni possono essere viste come *inevitabili* momenti di passaggio nella costruzione dei concetti che saranno solo momentanei se in seguito l’insegnante avrà la sensibilità didattica di fornire diverse rappresentazioni in vari registri, così che l’allievo lentamente compirà dei passi in avanti nella costruzione del concetto, ampliando le vecchie immagini-misconcezioni, fino a creare una nuova immagine in grado di contemplare tutte le successive sollecitazioni che gli verranno proposte. Ossia, lentamente lo studente annullerà i tratti distintivi dell’oggetto che non lo caratterizzano dal punto di vista matematico, per puntare l’attenzione su quelli che invece lo rappresentano in questo contesto (D’Amore, 2006).

L’“inevitabilità” delle misconcezioni oltre a dipendere *dalla necessità di dover far uso di rappresentazioni per poter spiegare un concetto* può anche essere imputata alla *necessaria gradualità del sapere,* così com’è mostrato nel seguente esempio.
Lo studente ha imparato negli anni a riconoscere il quadrato e il rettangolo tramite sollecitazioni scolastiche ed extra-scolastiche. Un giorno l’insegnante di scuola primaria analizza più a fondo da un punto di vista logico la definizione di quadrato a partire dal rettangolo e mostra come la richiesta che evidenzia la “differenza specifica” tra il “genere prossimo” rettangoli ed il “sottogenere” quadrati riguarda solo la lunghezza dei lati (che devono essere tutti congruenti). Quindi, dopo aver disegnato un quadrato alla lavagna, sostiene che esso è un

particolare tipo di rettangolo. La misconcezione che negli anni potrebbe essersi creata nell'allievo, che l'immagine prototipo di rettangolo è una figura che deve avere i lati consecutivi di lunghezze diverse, potrebbe a questo punto creare un conflitto cognitivo con la nuova immagine proposta dall'insegnante. Tale possibile *misconcezione* iniziale è da noi considerata *inevitabile*, in quanto dipende dalla necessaria gradualità dell'introduzione dei saperi che, per essere proposti, si devono ancorare a rappresentazioni semiotiche che spesso nascondono la totalità e la complessità del concetto; risulta in effetti impensabile poter proporre inizialmente tutte le considerazioni necessarie per poter caratterizzare un concetto dal punto di vista matematico.

Questi esempi di misconcezioni "inevitabili" sembrano essere legati agli ostacoli *epistemologici* (che dipendono da fatti intrinseci alla matematica stessa) e *ontogenetici* (che hanno origine negli allievi) proposti classicamente da Brousseau (1986); ostacoli, quelli epistemologici, che sono stati fatti rientrare nell'ultimo decennio da Luis Radford nelle "pratiche" sociali.

3. L'"evitabilità"

In questa cornice semiotica-culturale (D'Amore, 2003; Radford 2000, 2005), le misconcezioni "evitabili" sono quelle che derivano *direttamente dalla trasposizione didattica del sapere*, in quanto sono, appunto, una diretta conseguenza delle scelte degli insegnanti. Queste misconcezioni sono, dunque, riconducibili alla prassi scolastica "minata" da improprie consuetudini proposte dagli insegnanti ai propri allievi.

In effetti, capita spesso che, a complicare l'apprendimento dei concetti matematici, incidano le decisioni prese dall'insegnante, derivanti dalle proposte della *noosfera* (libri di testo, programmi, riviste, …), di fornire all'allievo giorno dopo giorno, sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali che vengono così accettate ciecamente dall'allievo generando misconcezioni nella mente degli allievi. Queste continue e univoche sollecitazioni fornite dall'insegnante fanno sì che lo studente, o addirittura a volte anche l'insegnante stesso, confonda la rappresentazione proposta con il concetto matematico che si vuole far apprendere: «Lo studente non sa che sta apprendendo segni che stanno per concetti e che dovrebbe invece apprendere concetti; se l'insegnante non ha mai riflettuto su questo punto, crederà che lo studente stia apprendendo concetti, mentre questi sta in realtà "apprendendo" solo a far uso di segni» (D'Amore, 2003).

La concettualizzazione degli oggetti matematici infatti non avviene ricorrendo ad uno solo di questi possibili sistemi semiotici, poiché il significato è forgiato dall'azione reciproca dei diversi mezzi di oggettivazione. L'insegnante ha il compito delicato di guidare e sostenere lo studente nella coordinazione di mezzi semiotici eterogenei, ciascuno dei quali è di per sé articolato e difficile da gestire, per evitare che l'allievo confonda l'oggetto matematico con una sua rappresentazione.
Tale pensiero è sostenuto anche da Duval (riportato in D'Amore, 2003) che ribadisce come, presso alcuni studiosi di didattica, si scorge una riduzione del segno ai *simboli convenzionali* che connotano direttamente e isolatamente dei concetti, ma che possono portare a misconcezioni (da noi chiamate *"evitabili"*), dato che diventano rappresentanti unici di un dato concetto in un dato registro. Eppure «(…) il coordinamento di registri è la condizione per la padronanza della comprensione in quanto essa è la condizione per una differenziazione reale tra i concetti matematici e la loro rappresentazione. Costituisce una soglia il cui superamento cambia radicalmente l'attitudine di fronte ad un tipo di attività o ad un dominio (…) Ora, questo coordinamento non ha niente di spontaneo» (Duval, 1995). Assumendo tutto questo come vero, ne consegue che occorre didatticamente fare molta attenzione alla scelta del sistema di segni, che rappresentano l'oggetto matematico che si vuole far apprendere ai propri allievi; un'attenzione che è spesso sottovalutata o data per scontata.

L'esempio da noi scelto da questo punto di vista, e analizzato in profondità in Sbaragli (2005b), verte su ricerche indirizzate nel rilevare modelli erronei in allievi e in insegnanti costruiti su immagini-misconcezioni riguardanti gli enti primitivi della geometria.
In questo contesto, tre le scelte didattiche che possono generare misconcezioni "evitabili", vi è quella di fornire sempre e solo univoche rappresentazioni convenzionali, che portano l'allievo, e a volte l'insegnante stesso, ad attribuire agli enti primitivi della geometria proprietà che risultano erronee nel contesto della matematica.
Ad esempio, per quanto riguarda il punto matematico, alla domanda posta dal ricercatore: *«Che cos'è per te un punto in matematica?»*, alcuni allievi ed insegnanti rispondono attribuendo a questo ente matematico una forma "tondeggiante", che corrisponde con quella di un cerchio o di una sfera a seconda se si sta parlando del piano o dello spazio.

- *«È un punto rotondo che forma le linee»* (terza media).
- *A.: «Il punto è sferico»* (insegnante di scuola primaria).
[L'ultima affermazione è di un insegnante che stava facendo costruire ai propri allievi poliedri "scheletrati" con pongo e stuzzicadenti e che pretendeva che i vertici dei solidi fossero realizzati esclusivamente di forma sferica, essendo a suo parere una proprietà caratteristica del punto matematico].
Come si rileva dai casi seguenti, alcuni allievi ed insegnanti associano all'idea erronea legata alla forma univoca dei punti matematici anche una certa dimensione variabile:
- *«Per me il punto può essere una cosa grandissima o microscopico perché è come un cerchio di diverse misure»* (quarta primaria).
- *«Per me il punto è un cerchio di diametro variabile»* (insegnante di scuola primaria).
È, in effetti, la dimensione variabile del punto matematico, l'erronea caratteristica sulla quale si concentra maggiormente l'attenzione degli intervistati, sostenendo come questa possa variare a seconda della rappresentazione scelta, confondendo così la singola rappresentazione con il concetto stesso.
Dalle idee distorte degli insegnanti sopra evidenziate, emerge come spesso la scelta delle rappresentazioni, non è una scelta didattica consapevole, ma deriva da modelli erronei posseduti dagli insegnanti stessi. G.: *«Sono trent'anni che dico ai miei bambini che il punto è quello che si disegna con la matita, non potrò cambiare adesso. E poi ritengo che sia proprio questo il vero significato di punto. Perché, non è più così?»* (insegnante di scuola primaria). La domanda posta da questo insegnante fa emergere la mancanza di un sapere concettuale e la presenza di un sapere legato alla trasposizione didattica che solitamente viene proposto dalla noosfera tramite libri di testo per studenti. Eppure, per non creare forti fraintendimenti come quelli rilevati, occorre innanzitutto che l'insegnante sia a conoscenza del significato "istituzionale" dell'oggetto matematico che intende far apprendere, in secondo luogo deve indirizzare in modo consapevole e critico le modalità didattiche. Da questo punto di vista sono numerose le ricerche che mostrano come le difficoltà riscontrate negli studenti sono le stesse riscontrate nei loro insegnanti (D'Amore, Fandiño Pinilla, 2005; Campolucci, Maori, Fandiño Pinilla, Sbaragli, 2006; Sbaragli, 2004) che quindi comportano misconcezioni "evitabili".
In effetti come sostiene Fandiño Pinilla (2006): «Se non abbiamo la possibilità di compiere trasposizione didattica da un Sapere che non c'è, di conseguenza le scelte metodologiche e di contenuto sono

fallimentari e vuote: *quel che trasmettiamo agli allievi è quel che siamo e sappiamo noi, inevitabile* realtà».
Da questi esempi emerge che le misconcezioni "evitabili" sembrano essere legate ai classici *ostacoli didattici* (Brousseau, 1986) che hanno origine nelle scelte didattiche e metodologiche dell'insegnante.
L'univocità e ripetitività delle rappresentazioni fornite non rappresenta l'unica causa delle misconcezioni *"evitabili"*; queste spesso dipendono dalle scelte delle rappresentazioni stesse, che possono essere forvianti e improprie rispetto al concetto che si vuole proporre. Il caso emblematico da noi scelto riguarda la consueta proposta della noosfera, adottata dalla maggioranza degli insegnanti, di indicare l'angolo con un "archetto" disegnato tra le due semirette che lo determinano. Questa rappresentazione risulta spesso univoca e soprattutto mal scelta, in quanto limitata in sé e che limita una parte di piano; ciò è in contrasto con la proprietà caratterizzante questo "oggetto" in àmbito matematico: la sua illimitatezza. Una ricerca condotta con 42 studenti di Scienze della Formazione Primaria di Bressanone ha dimostrato l'inadeguatezza di questa scelta semiotica. Alla domanda: *«Che cos'è un angolo?»,* 7 rispondono: *«Un angolo è la lunghezza dell'arco»,* 18 focalizzano l'attenzione sulla parte di piano limitata individuata dall'"archetto", 9 si dimostrano dubbiosi, mentre solo i rimanenti 8 studenti sembrano intuire il significato di angolo in matematica.[20]

Concludendo, in questo articolo si è voluto mettere in evidenza come la scelta dei segni non sia neutra o indipendente: «I mezzi semiotici di oggettivazione offrono possibilità diverse per svolgere un compito per designare oggetti ed esprimere intenzioni. (…) Occorre quindi saper individuare i mezzi semiotici di oggettivazione per ottenere oggetti di coscienza» (Radford, 2005).
Dal punto di vista dell'insegnamento, occorre quindi prestare attenzione ai mezzi semiotici di oggettivazione da proporre, alle misconcezioni che potrebbero generare, ai diversi livelli concettuali dei mezzi proposti e ai problemi posti agli allievi per passare da un livello all'altro; problematica quest'ultima messa bene in evidenza da Duval (2006).
Risulta quindi indispensabile per il superamento di misconcezioni "inevitabili" e l'assenza di misconcezioni "evitabili" fornire una grande varietà di rappresentazioni opportunamente organizzate e

---

[20] Per un approfondimento degli esempi di misconcezioni "evitabili" si veda Sbaragli, 2005a,b e Martini, Sbaragli, 2005 dove vengono anche presentate misconcezioni derivanti da posizioni vincolanti.

integrate in un sistema sociale di significazioni rappresentato dalle pratiche matematiche condivise dagli allievi.

Bibliografia

Brousseau G. (1976-1983). Les obstacles épistémologiques et les problèmes en mathématiques. Comptes rendus de la XXVIIIe rencontre de la C.I.E.A.E.M.: *La problematique de l'enseigmente des mathématiques.* Belgique: Louvain la Neuve. 101-117. [Ripubblicato su: *Recherches en didactique des mathématiques.* 4, 2, 1983, 165-198].

Brousseau G. (1986). Fondements et méthodes de la didactique des mathématiques. *Recherches en didactique des mathématiques.* 7, 2, 33-115.

Campolucci L., Maori D., Fandiño Pinilla M.I., Sbaragli S. (2006). Cambi di convinzione sulla pratica didattica concernente le frazioni. Una learning story basata su una ricerca – azione di gruppo e sua influenza sulle decisioni relative alla trasposizione didattica. *La matematica e la sua didattica*. 3, 353-400.

D'Amore B. (1999). *Elementi di didattica della matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2003). *Le basi filosofiche, pedagogiche, epistemologiche e concettuali della Didattica della Matematica.* Bologna: Pitagora.

D'Amore B. (2006). Oggetti matematici e senso. Le trasformazioni semiotiche cambiano il senso degli oggetti matematici. *La matematica e la sua didattica.* 4, 557-583.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2005). Relazioni tra area e perimetro: convinzioni di insegnanti e studenti. *La matematica e la sua didattica*. 2, 165-190.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2, 139-163.

Duval R. (1993). Registres de Répresentations sémiotiques et Fonctionnement cognitif de la Pensée. *Annales de didactique et de sciences cognitives.* 5, 37-65.

Duval R. (1995). Quel cognitif retenir en didactique des mathématiques? Actes de l'École d'été 1995. [Trad. it.: *La matematica e la sua didattica.* 3, 1996, 250-269].

Duval R. (2006). Trasformazioni di rappresentazioni semiotiche e prassi di pensiero in matematica. *La matematica e la sua didattica.* 4, 585-619.

Fandiño Pinilla M.I. (2006). Trasposizione, ostacoli epistemologici e didattici: quel che imparano gli allievi dipende da noi. Il caso emblematico di frazioni, area e perimetro. In: Sbaragli S. (ed.) (2006). *La Matematica e la sua Didattica, vent'anni di impegno.* Atti del Convegno Internazionale omonimo, Castel San Pietro Terme, 23.09.06. Bologna: Pitagora. 117-120.

Martini B., Sbaragli S. (2005). *Insegnare e apprendere la matematica.* Napoli: Tecnodid.

Radford L. (2000). Signs and meanings in students' algebraic thinking: a semiotic perspective. *Educational Studies in Mathematics.* 42, 237-268.

Radford L. (2002). The seen the spoken and the written: a semiotic approach to the problem of objectification of mathematical knowledge. *For theLearning of Mathematics*. 22(2), 14-23.

Radford L. (2005) La generalizzazione matematica come processo semiotico. *La matematica e la sua didattica.* 2, 191-213.

Sbaragli S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. *Tesi di Dottorato di ricerca.* Università Komenského di Bratislava, direttore Ivan Treskansky, advisor Bruno D'Amore. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm

Sbaragli S. (2005a). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1, 57-71.

Sbaragli S. (2005b). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 50, 69-76.

Convinzioni e cambi di convinzioni sull'infinito matematico

Silvia Sbaragli

N.R.D. - Dipartimento di Matematica - Università di Bologna - Italia
A.S.P. – Locarno – Svizzera

Lavoro eseguito nell'àmbito del Programma di Ricerca 60% dell'Università di Bologna (Dipartimento di Matematica): «*Aspetti metodologici (teorici ed empirici) della formazione iniziale ed in servizio degli insegnanti di matematica di ogni livello scolastico*».

Pubblicato in: Sbaragli S. (2006). Primary School Teachers' beliefs and change of beliefs on Mathematical Infinity. *Mediterranean Journal for Research in Mathematics Education.* 5, 2, 49-76.

> «L'infinito! Nessun altro problema ha mai scosso così profondamente lo spirito umano; nessuna altra idea ha stimolato così profondamente il suo intelletto; e tuttavia nessun altro concetto ha maggior bisogno di chiarificazione che quello di infinito».
>
> (David Hilbert, 1925-1989)

Summary. *This study is included in the complex problems about the teaching and the learning of the concept of mathematical infinity pointing out the convictions, the intuitive acceptances, the mental processes of primary school teachers. In particular the teachers' misconceptions can be considered like the starting of didactical obstacles that, with epistemological ones frequently pointed out in the international literature, create difficulties in the learning of this concept by secondary high school students. Moreover, such difficult didactical obstacles are hard to eliminate, unless one intervenes on primary school teachers' preparation in this specific field.*

Sunto. *In questo articolo viene trattata la complessa problematica dell'insegnamento-apprendimento del concetto di infinito matematico puntando l'attenzione sulle convinzioni, le accettazioni intuitive e i processi mentali degli insegnanti di scuola primaria. In particolare, le misconcezioni possedute dagli insegnanti sono considerate la causa di ostacoli didattici che, insieme a quelli epistemologici messi in evidenza dalla letteratura internazionale, creano difficoltà all'apprendimento di questo concetto negli studenti di scuola secondaria superiore. Per questo viene messo in evidenza come gli ostacoli didattici potrebbero essere eliminati tramite corsi di formazione su questo specifico argomento rivolti ad insegnanti di scuola primaria.*

1. Introduzione

Questo articolo rappresenta la sintesi di un lavoro di ricerca durato vari anni relativo all'infinito matematico; i primi risultati di ricerca sono già stati oggetto di pubblicazione (Sbaragli, 2003, 2004). In tale sintesi si pone un'attenzione specifica sulle convinzioni, ed i cambi di convinzioni, degli insegnanti di scuola primaria relativi all'infinito matematico. In particolare, si intende mettere in evidenza come tale argomento risulta essere sconosciuto da parte degli insegnanti di questo livello scolastico sia dal punto di vista matematico-epistemologico che cognitivo; per questo, si possono rintracciare, tra le convinzioni possedute da questi insegnanti, numerose misconcezioni[21] che rientrano in diversi àmbiti della Matematica. Inoltre, l'eventuale cambio di convinzione che avviene in alcuni di questi insegnanti, posti a contatto con una elementare trattazione matematica dell'infinito matematico, mette in evidenza come l'infinito non sia mai stato oggetto di formazione o di personale profonda riflessione, ma come consti solo di convinzioni spontanee ed intuitive, basate sul buon senso. Si ha, come conseguenza, l'esplicitazione da parte degli insegnanti di un forte personale disagio nei confronti di questo tipo di sapere, disagio che ha negative ripercussioni sulla trasposizione didattica.

2. Quadro teorico di riferimento

2.1. Convinzioni e cambi di convinzione

Il quadro teorico di riferimento si inserisce all'interno delle convinzioni e dei cambi di convinzioni sulla matematica. Gli studi in questo campo hanno origini abbastanza recenti, tuttavia essi

[21] Sul significato di questo termine, si vedano le riflessioni critiche proposte in D'Amore, Sbaragli (2005) ed in Sbaragli (2005a).

rivelarono immediatamente il grande impatto che questo tipo di considerazioni ha dal punto di vista didattico.
Per affrontare tale analisi ci serviremo preliminarmente di una distinzione che appare in D'Amore e Fandiño (2004) e che facciamo nostra:
«- *convinzione* (belief) (o credenza): opinione, insieme di giudizi/attese, quel che si pensa a proposito di qualcosa;
- l'insieme delle convinzioni di qualcuno (A) su qualcosa (T) dà la *concezione* (K) di A relativamente a T; se A appartiene ad un gruppo sociale (S) e condivide con gli altri appartenenti ad S quell'insieme di convinzioni relativamente a T, allora K è la concezione di S relativamente a T».
Noi ci occupiamo qui solo delle convinzioni nel caso in cui T sia la matematica dell'infinito e analizzeremo come S gli insegnanti di scuola primaria.
In questo campo è importante ricordare il lavoro di Schoenfeld (1992) che arriva a sostenere che ogni individuo concettualizza la matematica e si pone nell'ambiente matematico proprio in base al sistema delle proprie convinzioni sulla matematica, il che implica che è impossibile separare conoscenze (di matematica) e convinzioni (sulla matematica) negli insegnanti (si veda anche: Fennema, Franke, 1992).
Tra gli altri classici studi in questo campo ricordiamo: Thompson (1992) che presenta un'estesa panoramica delle ricerche empiriche sulle convinzioni e le credenze; Hoyles (1992) che mette in evidenza come non sia possibile separare l'analisi delle convinzioni di un individuo da quelle del gruppo sociale di cui fa parte, dato che esse sono comunque il risultato di complesse interazioni tra gruppi sociali; Pehkonen (1994) che offre una bibliografia estesa sul tema, trattando in particolare le convinzioni degli insegnanti sulla matematica e il conseguente cambiamento nell'insegnamento; da Ponte et al. (1999) che propone un'interessante e dettagliata panoramica delle ricerche concernenti le convinzioni degli insegnanti sulla matematica e sul processo di insegnamento-apprendimento della matematica. Inoltre, molto interessante per i nostri scopi è lo studio proposto da Leder et al. (2002) in venti capitoli tutti rivolti alle convinzioni sulla matematica analizzate da differenti prospettive, dove viene sintetizzato un panorama in questo campo. In particolare, la seconda sezione di questo testo è rivolta alle convinzioni degli insegnanti. Altre interessanti considerazioni teoriche sulla struttura delle convinzioni e sulle ricerche attuali a questo proposito sono contenute in Törner (2002).

Vanno inoltre ricordati gli studi effettuati da Llinares in questo campo: quello del 1996 dove l'autore mette in relazione le convinzioni con la conoscenza; quello del 1999 dove punta l'attenzione sulla relazione dialettica tra convinzioni e pratica mostrando come è difficile indicare se le convinzioni dirigono la pratica o viceversa; quello del 2002 dove l'autore mette in evidenza il ruolo delle convinzioni nel processo legato all'apprendere ad insegnare secondo una prospettiva situata: quel che si apprende dipende da quello che si problematizza e si codifica negli ambienti di apprendimento. In pratica si mette in evidenza come le convinzioni (insieme ad altri fattori) influiscono su cosa si apprende e su come si apprende.
Gli studi di Tirosh e Graeber (2003) rilevano che le convinzioni possono essere un ostacolo ma anche una potente forza che spinge ad effettuare cambiamenti nella pratica personale dell'insegnamento.
La struttura della nostra ricerca ci ha spinto a considerare anche il problema del "cambio di convinzioni" nel senso dello "sviluppo - modifica delle convinzioni nel passare del tempo" (Wilson, Cooney, 2002); a tal proposito, in da Ponte et al. (1999) viene presentata una sintesi delle ricerche rivolte al cambio di convinzioni e di insegnamento nei docenti, alla quale rimandiamo per un approfondimento.
Inoltre, questo argomento è stato analizzato in profondità anche da Strehle et al. (2002) che tratta il cambio di convinzioni che comporta il cambio di pratica come conseguenza dell'introduzione dell'informatica nell'insegnamento e da Chapman (2002) che presenta un'interessante analisi effettuata su insegnanti, risultata di grande aiuto dal punto di vista teorico per questa trattazione.

2.2. Infinito matematico: dagli ostacoli epistemologici agli ostacoli didattici

Gli studi in didattica della matematica che hanno analizzato la problematica dell'insegnamento e dell'apprendimento relativi all'infinito matematico sono numerosissimi, puntando particolarmente l'attenzione sugli allievi per esaminare quali siano i motivi che fanno della problematica dell'infinito una tematica così difficile da essere costruita correttamente.
Per evitare di ripercorrere la vastissima letteratura, facciamo principalmente riferimento a D'Amore (1996, 1997); questi articoli sono stati usati come base per il lavoro svolto ad ICME VIII, Siviglia 14-21 luglio 1996, come l'allora attuale panorama internazionale di ricerca, dato che l'autore era Chief Organizer del Topic Group 14: Infinite processes throughout the curriculum; siamo dunque partiti da

questa ricca e ragionata panoramica delle diverse "categorie" di ricerca che contiene una bibliografia di oltre 300 titoli, attualizzandola fino ad oggi.
La maggior parte di queste ricerche ha, come abbiamo già detto, come soggetti gli studenti; molte delle ricerche precedenti il 1996 mostrano come, sia dal punto di vista storico che per quanto concerne l'apprendimento del concetto di infinito matematico, l'evoluzione di questo argomento sia molto lenta ed avvenga spesso in modo contraddittorio e solo grazie ad un processo di sistemazione e maturazione cognitiva delle creazioni umane e degli apprendimenti che riguarda solo un numero assai limitato di individui. Da questo punto di vista, facciamo preciso riferimento alle seguenti ricerche, tutte ispirate dal classico dibattito filosofico su infinito in senso potenziale e in senso attuale: Moreno e Waldegg (1991) studiano gli usi potenziali ed attuali del termine "infinito", a volte considerato come aggettivo e a volte come sostantivo; Tsamir e Tirosh (1992) studiano le difficoltà incontrate dagli allievi nell'acquisire l'idea di infinito attuale; Shama e Movshovitz Hadar (1994) mostrano come, a proposito di conteggio, dall'analisi di fenomeni periodici si possa giungere a considerare l'infinito come un numero intero; Bagni (1998 e 2001) mette in evidenza la differenza dello stato dell'infinito e dell'infinitesimo potenziale e attuale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi; Garbin (2003) mostra le incoerenze degli studenti universitari nel trattare l'infinito attuale.
Tutte queste ricerche ed altre non citate per brevità sono volte a dimostrare la presenza di ostacoli epistemologici tramite le intuizioni primarie degli allievi, che risultano essere analoghe a quelle che si sono riscontrate nella storia della matematica e che permettono di spiegare alcune difficoltà incontrate dagli allievi. Da questo punto di vista ricordiamo ancora la ricerca di Schneider (1991) che tratta l'ostacolo epistemologico della eterogeneità delle dimensioni sollevato dagli infiniti tagli di una superficie o di un solido con allievi di 15-18 anni. Un altro ostacolo evidenziato da Duval (1983) per quanto concerne l'infinito, è detto di *scivolamento* e consiste nella difficoltà che hanno gli studenti ad accettare la corrispondenza biunivoca tra N e il suo sottoinsieme dei numeri pari; in questo caso l'autore parla di scivolamento dal verbo Avere al verbo Essere nel corso della dimostrazione. In Arrigo e D'Amore (1999, 2002) si parla di scivolamento in senso più ampio, ossia quando nel corso di una dimostrazione si sta parlando di qualche cosa (o in un certo modo o nell'àmbito di un certo linguaggio) e, d'improvviso, ci si trova a parlare d'altro (o in un altro modo o in un altro linguaggio).

Le ricerche di Arrigo e D'Amore (1999, 2002), riguardanti studenti al termine del percorso di scuola superiore, evidenziano che le misconcezioni da essi possedute non dipendono soltanto da ostacoli epistemologici, ma anche da ostacoli di tipo didattico. In queste due ricerche viene particolarmente messo in evidenza un classico fenomeno già noto come *dipendenza*, in base al quale, per esempio, vi sono più punti in un segmento più lungo, rispetto ad uno più corto. Tale misconcezione era già stata rilevata da Fischbein, Tirosh e Hess fin dal 1979, e poi ripresa in diversi lavori successivi (si veda, ad esempio, Fischbein, 1992a; 2001), e trattata da Tall in un classico articolo del 1980. Lo stesso fenomeno riguarda non solo l'àmbito geometrico, nel quale era stato evidenziato; si parla infatti di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici; ad esempio, dato che l'insieme dei numeri pari rappresenta un sottoinsieme dell'insieme dei numeri naturali, si pensa che il primo debba essere costituito da un numero minore di elementi. Tra le ricerche che si sono occupate delle erronee intuizioni e rappresentazioni che si fanno gli studenti nel tentare di mettere in corrispondenza biunivoca insiemi infiniti, ricordiamo Tsamir e Tirosh (1994) e il successivo articolo del 1997 che punta l'attenzione sull'aspetto metacognitivo e sulla coerenza, oltre che Tall (2001); in tutti questi lavori viene messa in evidenza la convinzione degli studenti basata sulla veridicità dell'VIII nozione comune di Euclide: «*Il tutto è maggiore della parte*», sia per il finito che per l'infinito. Questo fenomeno di *dipendenza* dunque si basa sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti (Shama e Movshovitz Hadar, 1994).
Un altro modello intuitivo scorretto rilevato da Arrigo e D'Amore (1999, 2002) in studenti di scuola superiore è legato all'idea di segmento concepito come *"collana di perle"*, ossia considerato come un filo-segmento formato da perline-punti a contatto l'una con l'altra. Tale modello è legato a misconcezioni riguardanti il punto matematico considerato come ente avente una qualche dimensione ed a idee erronee relative alla topologia della retta [da questo punto di vista ricordiamo anche le ricerche di Tall (1980) che analizza le convinzioni degli studenti a proposito del numero dei punti contenuti in una retta e in un segmento, e Gimenez (1990) che si basa sulla difficoltà degli allievi di scuola primaria a concepire il concetto di densità].
Un altro fenomeno che rientra nella trattazione dei lavori di Arrigo e D'Amore, (1999, 2002) è chiamato in letteratura *"appiattimento"* e consiste nel ritenere tutti gli insiemi infiniti come aventi la stessa cardinalità, ossia nel ritenere che tutti gli insiemi infiniti possano

essere messi in corrispondenza biunivoca tra loro. Tale fenomeno era già stato evidenziato in precedenza da Waldegg (1993) e da Tsamir e Tirosh (1994) che avevano studiato le intuizioni e le rappresentazioni che si fanno gli studenti nel tentare di mettere in corrispondenza biunivoca insiemi infiniti, o da alcuni contributi della scuola di Tel Aviv, con particolare riferimento a Efraim Fischbein ed ai suoi allievi (Fischbein, Jehiam, Cohen, 1994, 1995) che avevano messo in evidenza le difficoltà degli studenti di passare dal denso al continuo, mostrando le difficoltà a costruire correttamente l'idea di numero irrazionale. Più in dettaglio, in letteratura si è mostrato come, una volta accettato da parte degli studenti che due insiemi come N e Z debbano avere la stessa cardinalità (su spinta del ricercatore o del docente che mostra una corrispondenza biunivoca tra i due insiemi), risulta molto frequente la generalizzazione che tutti gli insiemi infiniti debbano avere necessariamente la stessa cardinalità. Questa misconcezione, come è stato rilevato in Arrigo e D'Amore (1999, 2002), non dipende solo da un ostacolo epistemologico, ma anche da ostacoli didattici.

Anche il fenomeno di *appiattimento,* così come quello di *dipendenza,* si basa sulla generalizzazione ai casi infiniti di ciò che si è appreso circa la corrispondenza biunivoca sui casi finiti (Shama e Movshovitz Hadar, 1994).

Per la nostra trattazione, va anche ricordato lo studio condotto da Garbin (2005) riguardante l'incidenza, non sempre positiva, delle rappresentazioni e dei diversi linguaggi della matematica nella percezione dell'infinito da parte di alunni di 16 e 20 anni. L'interessante e originale ricerca di D'Amore et al. (2004) effettuata in Colombia, Italia e Svizzera sul "senso dell'infinito", che dimostra che un tale senso esiste, ma può essere raggiunto solo in casi estremamente specifici. Inoltre, i risultati rilevano che non c'è legame tra il "senso del numero" con la conseguente capacità di dare "stime" intuitive accettabili ed il "senso dell'infinito" con la conseguente capacità di dare "stime" intuitive di cardinalità infinite.

Infine, ancora più centrato in questo lavoro di ricerca è lo studio di Tsamir (2000) concernente le misconcezioni degli insegnanti sull'infinito, che possono costituire, per ovvi motivi di trasmissione culturale, ostacoli didattici per l'apprendimento degli allievi; in particolare, l'autore rileva come le difficoltà a trattare l'infinito in senso attuale, piuttosto che potenziale, non siano presenti solo tra studenti, ma anche tra insegnanti in formazione, il che rafforza la necessità di prendere in futuro sempre più in esame gli ostacoli didattici e i contenuti disciplinari della formazione.

3. Descrizione dei problemi di ricerca

Descriviamo in modo esplicito i problemi che ci hanno spinto alla presente ricerca, sotto forma di domande:

P1. Le convinzioni degli insegnanti di scuola primaria sull'infinito matematico sono quelle attese nel contesto della matematica, oppure risultano essere misconcezioni distanti da quelle corrette? Più esplicitamente, gli insegnanti di scuola primaria conoscono l'infinito matematico sia in senso matematico - epistemologico che cognitivo? In particolare, che cosa conoscono di tale argomento?

P2. Le eventuali misconcezioni rilevate tra gli insegnanti a proposito dell'infinito, coinvolgono tutti gli àmbiti della matematica (aritmetica e geometria, in particolare) o maggiormente uno di essi? Di che tipo sono?

P3. Le eventuali misconcezioni rilevate tra gli insegnanti a proposito dell'infinito, sono convinzioni stabili o gli insegnanti sono disposti a cambiare opinione, una volta posti a contatto con il relativo sapere matematico corretto, per esempio proposto sotto forma di corso o di colloquio? Tali insegnanti disposti a cambiare convinzioni si dimostrano anche disposti a cambiare l'insegnamento?

4. Ipotesi della ricerca

Riportiamo le nostre ipotesi relative alle domande descritte nel paragrafo 3:

I.1. A nostro avviso, molte delle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria sull'infinito matematico risulteranno essere misconcezioni nell'àmbito della matematica. Questa nostra ipotesi deriva dalla nostra convinzione, rilevata dall'esperienza di contatto con gli insegnanti, che per molti di essi l'infinito matematico rappresenta un argomento sconosciuto sia in senso matematico - epistemologico che cognitivo, di conseguenza pensiamo che gli insegnanti non siano in grado di maneggiare l'infinito e non riescono a concepirlo come un "oggetto matematico". Ipotizziamo quindi che non vi siano conoscenze specifiche su questo argomento se non convinzioni ingenue che risulteranno in gran parte essere vere e proprie misconcezioni.

I.2. Inoltre, se si rilevano le misconcezioni degli insegnanti ipotizzate in I.1., a nostro parere queste coinvolgono tutti gli àmbiti della matematica, in particolare sia l'àmbito geometrico che aritmetico allo stesso modo. Ipotizziamo che gli insegnanti siano ancorati a convinzioni ingenue del tipo che *l'infinito* non è altro che *l'indefinito,* *l'illimitato* (convinzione dovuta ad una confusione anche linguistico - semantica tra gli aggettivi "infinito", "illimitato" e "indefinito"), *un numero finito molto grande* (che porta di conseguenza a trasferire le stesse procedure degli insiemi finiti agli insiemi infiniti, considerati appunto come insiemi finiti *molto grandi*) o un esclusivo *procedimento potenziale.* Inoltre ipotizziamo di rintracciare nelle affermazioni degli insegnanti le misconcezioni di *dipendenza* e *appiattimento,* oltre che il "modello della collana", indicato spesso dagli studenti (anche evoluti) come modello adatto per rappresentarsi mentalmente i punti sulla retta e che è stato a volte evidenziato dagli allievi (di fine scuola secondaria) come modello fornito dai loro insegnanti di scuola primaria, modello che resiste ad ogni successivo tentativo critico di costruzione di una più corretta conoscenza (Arrigo e D'Amore, 1999; 2002).

I.3. A nostro avviso, una volta verificate le nostre due prime ipotesi, diversi insegnanti nei quali si sono riscontrate misconcezioni, confrontati con un sapere matematico corretto sul tema dell'infinito, si dimostreranno disposti a cambiare convinzione, segno che questo sapere verte solo su spontanee intuizioni che, per quanto radicate, non sono sostenute da nessuna conoscenza in questo àmbito. Ossia, a nostro avviso, gli insegnanti sono disposti ad ammettere le loro carenze per quanto riguarda questo sapere e di conseguenza a cambiare convinzione una volta costruito un sapere specifico corretto. Questi stessi insegnanti si diranno disposti a cambiare l'insegnamento solo come conseguenza di una profonda formazione in questo campo.

Se le ipotesi fin qui evidenziate si verificassero, si dovrebbe prendere in esame la possibilità e la necessità di rivedere i contenuti a carattere disciplinare da proporre nei corsi di formazione degli insegnanti di scuola primaria; non tanto e non solo perché gli insegnanti modifichino i contenuti culturali del proprio sapere, ma soprattutto perché evitino il formarsi di quei modelli intuitivi che producono quelle situazioni di disagio cognitivo ai propri allievi riscontrate dalla ricerca.

5. Metodologia della ricerca. Insegnanti sui quali si è effettuata la ricerca, metodo di svolgimento e contenuti

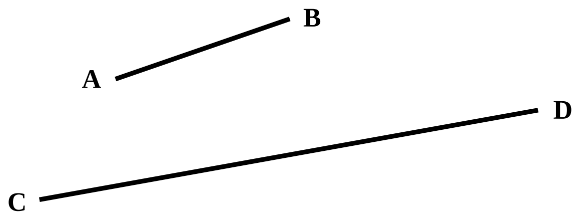
La ricerca è stata effettuata coinvolgendo 16 insegnanti italiani di scuola primaria (4 di Venezia, 8 di Forlì, 4 di Bologna) tramite una metodologia che verte su varie tappe.

La prima tappa consiste in un questionario da completare individualmente costituito da 13 fogli formato A4 in ognuno dei quali era presente una sola domanda (la rimanente parte bianca del foglio era lasciata vuota per consentire agli insegnanti di scrivere la risposta). Le domande erano così suddivise: 11 erano incentrate sul sapere posseduto dagli insegnanti sull'infinito matematico; 2 sull'azione didattica effettuata dagli insegnanti in classe.
In questo articolo analizzeremo solo le 11 domande che vertono sulle convinzioni degli insegnanti concernenti questo sapere, mentre le altre 2 domande relative alla trasposizione didattica effettuata in classe saranno oggetto di un successivo articolo.
Le 11 domande che tratteremo in questo articolo sono le seguenti:

1) Che cosa pensi che significhi infinito matematico?

2) Il termine "infinito" in matematica esiste sia come aggettivo che come sostantivo?

3) Ci sono più punti nel segmento AB o nel segmento CD? (Scrivi nel foglio tutto ciò che ti ha fatto venire in mente questa domanda).



4) Quanti sono i numeri pari: 0, 2, 4, 6, 8, …?

5) Quanti sono i numeri dispari: 1, 3, 5, 7…?

6) Quanti sono i numeri naturali: 0, 1, 2, 3…?

7) Quanti sono i multipli di 15?

8) Sono di più i numeri pari o i numeri dispari?

9) Sono di più i numeri pari o i numeri naturali?

10) Sono di più i numeri dispari o i numeri naturali?

11) Sono di più i multipli di 15 o i numeri naturali?

Vista la natura della ricerca e soprattutto le competenze dei soggetti esaminati su questo tema, non si è ritenuto necessario stabilire un

ordine nelle domande che desse preliminarità al discreto rispetto al continuo; di fatto, solo la domanda numero 3 è decisamente inseribile nel filone "infinito continuo".
Per la messa a punto del questionario si sono realizzati precedentemente diversi colloqui informali con vari insegnanti, differenti da quelli che rientrano nella ricerca vera e propria, necessari per la leggibilità e la comprensibilità del testo.
Il questionario è stato riconosciuto come facilmente "comprensibile" dagli insegnanti. In effetti dopo una prima lettura delle domande, tutti hanno affermato che era di semplice interpretazione; eppure, quando si trattava di rispondere alla prima domanda, 13 insegnanti hanno manifestato un forte disagio del tipo: *«Non so che cosa scrivere, non ho mai riflettuto su questo argomento»*. Solo dopo qualche affermazione di auto-rassicurazione del tipo: *«Io scrivo quello che mi viene in mente, anche se non sarà proprio detto bene»*, iniziavano a rispondere alla prima domanda.
Per lo svolgimento del questionario si è lasciata un'ora di tempo, per permettere agli insegnanti di leggere, riflettere, pensare e decidere con calma che cosa rispondere. Nessun insegnante ha utilizzato tutto il tempo a disposizione.
Solo dopo che ogni insegnante aveva consegnato tutti i fogli contenenti le risposte, si iniziava la fase successiva di confronto collettivo e di scambio di opinioni, per la quale non si erano dati limiti di tempo.
Il questionario ha quindi rappresentato il punto di partenza per effettuare successive discussioni sulle problematiche relative all'infinito matematico, che sono avvenute per quattro volte tra il ricercatore e due insegnanti, mentre per altre due volte tra il ricercatore e quattro insegnanti (per un totale di 16 insegnanti). Le prove sono state quindi effettuate in 6 differenti giornate. Tali gruppi sono stati creati sempre in modo da mettere a confronto insegnanti ben affiatati, abituati al dialogo e ad uno scambio di opinioni, indipendentemente dal numero complessivo di insegnanti che formavano ogni gruppo.
La scelta di far nascere confronti tra insegnanti, più che tra un singolo insegnante e il ricercatore, verte sull'esigenza di far emergere le reali convinzioni profonde sui diversi temi. In effetti, quando ad un insegnante viene richiesto di esprimere o difendere la propria opinione con un collega con il quale è abituato ad argomentare e che ha più o meno le stesse conoscenze sull'argomento proposto, ci si aspetta che si senta più libero di manifestare la propria opinione. In questo modo si è cercato di ridurre alcuni atteggiamenti da parte degli insegnanti,

del tipo: "fiducia nel ricercatore" o "fiducia in ciò che sostengono i matematici" [già più volte evidenziati dalla letteratura, si veda ad esempio: Perret Clermont, Schubauer Leoni e Trognon (1992)], che si manifestano non solo quando la ricerca ha come soggetti degli studenti, ma anche quando ha gli insegnanti.
La fase di discussione così strutturata è risultata determinante e assai più significativa delle risposte scritte date al questionario; in effetti, soprattutto per un argomento così complesso e sofisticato, si è reso necessario indagare in profondità sulle convinzioni degli insegnanti, sfruttando lo scambio di opinioni che ha permesso di ripercorrere le risposte date al questionario per saggiarne il senso reale, per verificarne la stabilità e per evidenziare eventuali contraddizioni.
La tecnica utilizzata è stata quindi quella della discussione attiva in gruppi di diversa consistenza numerica, facendo uso del registratore e lasciando in questa fase al ricercatore solo il compito di indirizzare la discussione, intervenendo solo in determinati punti della conversazione per sollecitare alcuni aspetti rilevanti della tematica. In questo modo si volevano mettere in evidenza le convinzioni degli insegnanti, i loro dubbi e le perplessità, i modelli intuitivi radicati, tenendo ben presente in questa parte dell'intervista la necessità da parte del ricercatore di non modificare il punto di vista degli insegnanti.
In tutte le occasioni si era ampiamente chiarito che si trattava di un lavoro di ricerca nel quale non sarebbero apparsi i nomi degli insegnanti intervistati.
Successivamente, quando la discussione sull'infinito matematico si era totalmente esaurita con l'esplicitazione delle convinzioni degli insegnanti, il ricercatore assumeva il ruolo di formatore, presentando situazioni di apprendimento, spiegando saperi concernenti tale àmbito, spesso in contrasto con le precedenti convinzioni degli insegnanti.
In particolare, venivano mostrate due corrispondenze biunivoche tra insiemi infiniti relative alle domande n. 3 e 9 del questionario, alle quali seguivano due domande (che illustreremo in dettaglio qui di seguito) alle quali rispondere in modo individuale. Più in dettaglio, il ricercatore proponeva inizialmente una versione elementare della classica dimostrazione di Georg Cantor (1845-1918) relativa alla domanda n. 3 che mostra come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse (Courant, Robbins, 1941). Per realizzarla, il ricercatore - formatore mostrava la corrispondenza biunivoca su un foglio di carta dove si erano già predisposti i segmenti AB e CD (spostati in modo opportuno nel piano rispetto alla domanda n. 3, mediante isometrie, in modo da essere disposti su rette parallele e

"centrati" l'uno rispetto all'altro). Inizialmente disegnava, aiutato da un righello, il punto O di intersezione delle rette AC e BD; successivamente da O proiettava i punti del segmento AB sul segmento CD e viceversa, mostrando così la corrispondenza biunivoca tra gli insiemi di punti dei segmenti AB e CD. Tramite questa costruzione, il ricercatore voleva far notare come vi sia la stessa quantità di punti in due segmenti di lunghezze diverse.

Successivamente veniva consegnato ad ogni insegnante un foglio nel quale era scritta la seguente domanda alla quale rispondere in modo individuale:

12) Con la massima sincerità, rispondi alla seguente domanda: ti ha convinto la dimostrazione che ci sono tanti punti in AB quanti in CD?

Dopo che era stato consegnato il foglio con la risposta alla domanda n. 12, il ricercatore proponeva la dimostrazione relativa alla domanda n. 9, che mette in evidenza come l'insieme dei numeri pari (P) sia equipotente all'insieme dei numeri naturali (N), facendo vedere la relativa corrispondenza biunivoca (seguendo Tall, 2001, pp. 213-216). Illustriamo lo schema della corrispondenza biunivoca mostrata agli insegnanti:

N	0	1	2	3	4	5	…	n	…
	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$	$\updownarrow$
P	0	2	4	6	8	10	…	2n	…

Questa idea ha come origine la considerazione che fece Galileo Galilei (1564-1642) (anche se Galileo Galilei parlava di numeri quadrati e non di numeri pari): ad ogni numero naturale corrisponde un ben preciso quadrato e, viceversa, ad ogni numero quadrato corrisponde un ben preciso naturale (la sua «radice aritmetica»). In base a tale dimostrazione, ci sono tanti numeri naturali quanti quadrati.

Come per la domanda precedente, si forniva ad ogni insegnante un foglio con la seguente domanda alla quale rispondere individualmente:

13) Con la massima sincerità rispondi alla seguente domanda: ti ha convinto la dimostrazione che ci sono tanti numeri nell'insieme dei pari quanti nell'insieme dei numeri naturali?

Solo dopo che ogni insegnante aveva consegnato la risposta a quest'ultima domanda, il ricercatore-formatore, prima di avviare una discussione sulle due dimostrazioni fornite, presentava anche la distinzione tra infinito potenziale ed attuale così com'era stata proposta da Aristotele. Dopo queste sollecitazioni si avviava una discussione con gli insegnanti per valutare se erano avvenuti eventuali cambi nelle loro convinzioni come conseguenza della formazione che coinvolgeva i tre aspetti sopra menzionati. Per sondare tali cambi si valutavano le risposte fornite dagli insegnanti, le affermazioni dette ai loro colleghi e quelle sostenute con il ricercatore.

6. Risultati del test e degli scambi di opinioni

Dalle risposte scritte alle domande del questionario, sono emerse affermazioni piuttosto generiche che sono state approfondite solo grazie agli scambi di opinioni tra gli insegnanti. Qui di seguito riportiamo alcune tra le risposte fornite ad ogni domanda del questionario, scelte come emblematiche, integrate con le affermazioni effettuate durante la discussione successiva. La scelta delle risposte ha come finalità quella di far percepire l'intera panoramica delle convinzioni degli insegnanti interpellati. Con la dicitura Ric. si sono indicati gli interventi effettuati dal ricercatore durante la discussione, per sollecitare la conversazione e per indagare più in profondità sulle convinzioni degli insegnanti. Seguiranno nel paragrafo successivo i cambi di convinzioni degli insegnanti avvenuti come conseguenza della formazione.

6.1 Descrizione dei risultati del questionario e dei relativi scambi di opinioni

1) Per quanto riguarda le risposte alla prima domanda del questionario, di seguito proponiamo una classificazione esaustiva; alcuni punti di tale classificazione rientrano tra quelli già noti alla ricerca internazionale sul tema, altri sono nuovi e perciò interessanti. Presenteremo molto succintamente le risposte che danno luogo a classificazioni già note alla ricerca, mentre indugeremo di più sulle altre. Si può notare come *nessuno* dei 16 insegnanti intervistati possedesse una concezione adeguatamente corretta dell'infinito dal punto di vista matematico. Riteniamo importante precisare che la classificazione scelta, non è definitiva; in effetti, come vedremo in seguito, alcune affermazioni degli insegnanti, che inizialmente erano state inserite in una determinata categoria, sono poi rientrate anche in altre come conseguenza dalla conversazione successiva.

• ***Infinito come indefinito.*** 7 insegnanti tendono a considerare l'infinito come indefinito, nel senso che non si sa quanto sia, che cosa sia, che cosa rappresenti.

R.: Per me vuol dire senza confini, senza margini come lo spazio.
Ric.: Cioè nel senso di indefinito?
R: Sì, senza il contorno.

C.: Qualcosa che non si riesce a dire.
Ric.: In che senso?
C.: Che non si sa quanto sia.

A.: Ciò che non si può tradurre per iscritto.

• ***Infinito come numero finito grande.*** Altri 3 insegnanti sostengono che l'infinito non è altro che un numero finito grande.

A.: Per me è un numero grande, talmente grande che non si può dire esattamente il suo valore.

B.: Dopo un po', quando ci si stanca di contare si dice infinito per dire che è un numero sempre più grande.

• ***Infinito come illimitato.*** 5 insegnanti fanno coincidere l'infinito con l'illimitato, ritenendo che il termine infinito sia attribuibile solamente alla retta, alla semiretta, al piano, ossia a tutto ciò che è illimitato, mentre non si può parlare di infinito ad esempio parlando dell'insieme dei punti di un segmento, essendo questo limitato dai suoi estremi. Interessante è notare che se il ricercatore interviene ponendo la domanda: «*Quanti punti ci sono in un segmento?*», gli insegnanti mostrano di sapere che la risposta a questa domanda è: «*Infiniti*», ma senza percepire il senso e il significato matematico di questa affermazione. In effetti, indagando in profondità, 3 dei 5 insegnanti sostengono che nel caso del numero di punti in un segmento, l'infinito va considerato come un numero finito grande del quale non si conosce il valore preciso, mentre gli altri 2 insegnanti si ricollegano all'idea di infinito come indefinito: non si sa esattamente quanto sia; rientrando così tutte e 5 nelle altre categorie evidenziate per questa domanda. Per questi insegnanti, sembra che valga la seguente relazione: se si parla di linee, di piani e di spazio risultano sinonimi i termini "infinito" e "illimitato", mentre nel caso della quantità dei numeri o dei punti, si parla di infinito nel senso di numero finito molto grande o indefinito.
A.: Senza un limite.

M.: Ciò che quantitativamente non misuro.
(Anche in questo caso l'insegnante M. associa il termine infinito all'illimitato, senza pensare ad esempio al segmento che, pur essendo limitato e misurabile, nel senso inteso da M., contiene infiniti punti).

N.: Qualcosa di illimitato.

Ric.: Quindi nel segmento non useresti mai la parola infinito.
N.: No, perché ha un inizio e una fine.
Ric.: Secondo te quanti punti ci sono in un segmento?
N.: Ah, è vero, sono infiniti. Ma per dire un numero grande, ma non grandissimo come nella retta. Anche se si fanno piccoli piccoli i punti, più di tanti non ce ne stanno.

L'insegnante N. evidenzia la convinzione, che ritroveremo tra le risposte alla domanda n. 3, che vi sono più punti in una retta piuttosto che in un segmento, mettendo così in risalto l'idea che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti; punti che non sono dunque concepiti come enti astratti, ma come oggetti aventi una qualche dimensione.[22]

G.: Illimitato.
Ric.: Secondo te quanti punti ci sono in un segmento?
G.: In un segmento si dice che ci sono infiniti punti perché non si sa quanti sono esattamente.

• ***Infinito come procedimento.*** Solo un insegnante parla di infinito come risposta alla prima domanda, riferendosi ad un procedimento senza fine:
B.: L'infinito lo conosco, significa continuare ad andare avanti come con i numeri… per sempre.

Questa convinzione si collega all'idea di infinito potenziale che sarà approfondita nel paragrafo successivo. Analizzando le risposte più in profondità, si può osservare che, anche nell'affermazione di B., rientrante nella categoria di infinito come numero finito grande, o in altre risposte che ritroveremo successivamente, si rintraccia la convinzione degli insegnanti di infinito potenziale inteso come procedimento che continua per sempre; segno (peraltro atteso) che le convinzioni di uno stesso insegnante possono rientrare in diverse categorie.

2) La seconda domanda è stata posta per indagare se tra gli insegnanti vi fosse la consapevolezza del fatto che l'infinito rappresenta un oggetto matematico a sé stante.

Per 13 insegnanti si parla di infinito in matematica solo come aggettivo, mentre per gli altri 3 insegnanti anche come sostantivo; ma di questi 3 insegnanti, 2 concepiscono l'infinito nel senso di

---

[22] Questa convinzione deriva dalla rappresentazione che viene comunemente fornita del punto (sulla lavagna o sui libri di testo) e che condiziona l'immagine che non solo gli allievi, ma anche gli insegnanti, possiedono di questo oggetto matematico (Sbaragli, 2005b).

indefinito, mentre l'altro insegnante sostiene che si può usare questa parola anche come sostantivo, ma nel senso di un numero finito grande del quale non si conosce il valore.

N.: *Come aggettivo.*

M.: *In matematica esiste solo come aggettivo, nella lingua italiana anche come sostantivo.*

A.: *Come aggettivo si usa in matematica: numeri infiniti; spazio infinito.*
Come sostantivo in italiano: "L'Infinito" di Leopardi; "Vedo l'infinito"; "Mi perdo nell'infinito".

B.: *Anche come sostantivo, per dire un numero grande.*

3) La terza domanda verteva sulla presunta convinzione degli insegnanti che a diversa lunghezza dei segmenti debba corrispondere un diverso numero di punti; idea già emersa dalla risposta alla prima domanda effettuata da parte dell'insegnante N., riportata nel punto 1) di questo paragrafo.

Tutti e 16 gli insegnanti intervistati hanno affermato che in due segmenti di lunghezze diverse vi sono numeri differenti di punti, in particolare che a maggior lunghezza corrisponde un maggior numero di punti (come già rilevato in Fischbein, 2001, p. 311). È ovvio che, come immagine visiva, un segmento sembra essere incluso nell'altro, quindi vi è una ovvia influenza del modello figurale che, in questo caso, condiziona negativamente la risposta; in effetti per l'infinito non vale la nozione comune euclidea: «Il tutto è maggiore della parte».

Di seguito, riportiamo alcune risposte che rientrano nella convinzione sopra menzionata:

N.: *Mi fa venire in mente che la lunghezza diversa di due segmenti pregiudica più o meno punti nel segmento.*

B.: *Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore.*

G.: *In AB ce ne saranno tanti, in CD tantissimi.*

A.: *Non ne sono sicura. Dato che un segmento può essere considerato una serie di punti allineati, penso che CD contenga più punti di AB, anche se ho studiato che il punto è un ente geometrico che essendo astratto non è quantificabile perché non misurabile. Comunque direi in CD.*

[Si nota un'incoerenza tra ciò che l'insegnante A. afferma di aver studiato per preparare un esame di Analisi all'Università e ciò che pensa sia più ragionevole; ancora una volta il modello intuitivo dimostra la sua persistenza e predomina. In questa situazione è lampante come non vi sia coincidenza tra significato formale e significato intuitivo (Fischbein, 1985, 1992b)].

Questa accettazione intuitiva, che rappresenta un misconcetto assai diffuso, è già stata menzionata nel paragrafo 2. ed è detta *dipendenza* dei cardinali transfiniti da fatti relativi a misure (l'insieme di misura maggiore, ha più elementi); l'insegnante è quindi convinto che: maggiore lunghezza implica maggiore cardinalità dell'insieme di punti. Tale misconcetto, peraltro ben noto alla letteratura di ricerca da decenni, riapparirà tra le risposte alle domanda n. 9-10-11, dove la *dipendenza* viene intesa come *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" di insiemi numerici.

Inoltre, da queste affermazioni risulta molto presente il cosiddetto "modello della collana", già citato in questo articolo, che si basa sull'idea di segmento concepito come un filo formata da minuscole perline-punti, a contatto l'una con l'altra.

A tal proposito, ricerche accurate hanno ampiamente evidenziato che studenti maturi (ultimo anno delle superiori e primi anni di università) non riescono a diventare padroni del concetto di continuità proprio a causa di questo modello intuitivo persistente fornito dagli insegnanti (Tall, 1980; Gimenez, 1990; Romero i Chesa e Azcárate Giménez, 1994; Arrigo e D'Amore, 1999, 2002). Tramite le affermazioni fornite dagli insegnanti, siamo riusciti a mettere in evidenza che tale modello non rappresenta solo uno stratagemma didattico preliminare a qualche cosa di più corretto, usato dagli insegnanti per fornire ai propri studenti un'idea di segmento, con la consapevolezza però che questa è solo un'approssimativa immagine assai distante dal reale concetto matematico di segmento, bensì appare come l'effettivo modello che gli insegnanti stessi hanno di segmento e di punto e che dunque forniscono come modello definitivo ai propri studenti. Inoltre, dalle conversazioni risultano lampanti diverse manchevolezze nelle competenze degli insegnanti, legate soprattutto ai concetti di densità e di continuità dell'insieme ordinato dei punti della retta.

Da questo punto di vista risulta interessante il seguente brano di conversazione:

B.: Nel segmento CD; per forza, ha una lunghezza maggiore (B. sta parlando della quantità di punti di due segmenti).

Ric.: Quanti in più?

B.: Dipende quanto li fai grandi.

M.: Anche da come li fai larghi o attaccati; ma se li avvicini al massimo e li fai grandi uguali ce ne sono di più in CD.

G.: In CD, è più lungo.

Ric.: Ma tu li vedi raffigurati i punti qui sopra?

G.: Sì, è la geometria che facciamo che tende a farceli vedere i punti.

4) – 5) – 6) – 7) Per le quattro domande successive, 15 insegnanti rispondono dicendo: *«Infiniti»*, senza consapevolezza del significato di tale parola, tranne un insegnante che, dopo vari dubbi, scrive: *«Un bel po'!»*. La risposta "Infiniti" sembra dipendere da un atteggiamento assai diffuso in matematica, quello di rispondere con frasi stereotipate che non corrispondono ad una reale costruzione concettuale.

8) A partire da questa domanda e per quattro domande consecutive si è chiesto di confrontare le cardinalità di alcuni insiemi infiniti che di solito vengono presentati nella scuola primaria. Le risposte a questa domanda rientrano nelle seguenti tre categorie:

• ***Vi sono tanti numeri pari quanti dispari.*** 12 insegnanti su 16 sostengono questa ipotesi.
C.: Per me sono lo stesso numero.

• ***Non si può fare il confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.*** 3 insegnanti non riescono a concepire un confronto delle cardinalità di insiemi infiniti. In effetti nella logica di chi concepisce l'infinito o come indefinito o come un qualcosa di finito, molto grande, ma indeterminato come valore, risulta impossibile fare un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti.
R.: Non si può rispondere, non si può fare un confronto per gli infiniti.

• ***Gli incerti.*** Un insegnante risponde con una domanda:
A.: Direi che hanno la stessa quantità, i numeri pari e i numeri dispari; ma ho un grande dubbio: se sono infiniti come faccio a quantificarli?
(Da questa risposta si percepisce un infinito inteso come indefinito).

9) – 10) – 11) Le risposte date a queste tre domande rientrano nelle seguenti quattro categorie; va puntualizzato che i 16 insegnanti intervistati dimostrano tutti una grande coerenza, rispondendo sempre allo stesso modo a tutte e tre le domande:

• ***Sono di più i numeri naturali.*** 10 insegnanti rispondono che sono di più i numeri naturali, sostenendo così la nozione comune euclidea: «Il tutto è maggiore della parte».
C.: I numeri naturali.

• ***Non si può fare il confronto tra insiemi infiniti.*** Gli stessi 3 insegnanti che nella risposta n. 8 non concepivano un confronto tra le cardinalità di insiemi infiniti, continuano a pensarla nello stesso modo; questo fatto deriva dall'idea che si possa parlare di cardinalità solo al finito:
R.: Non si può rispondere, non si può fare un confronto.

• ***Gli incerti.*** Lo stesso insegnante che alla domanda n. 8 risponde con una domanda, continua a rispondere nello stesso modo, mostrando così una certa coerenza:
A.: Direi i numeri naturali, ma come faccio a quantificarli? Dire infinito non vuol dire niente.

• ***Sono tutti insiemi infiniti.*** 2 insegnanti sostengono che tutti gli insiemi considerati sono infiniti e quindi che hanno tutti la stessa cardinalità.
B.: Sono entrambi infiniti. Se due insiemi sono infiniti, sono infiniti e basta.
Dall'intervista a questi 2 insegnanti si evidenzia il misconcetto di *appiattimento* dei cardinali transfiniti, presentato nel paragrafo 2., che consiste nel ritenere che tutti gli insieme infiniti sono tra loro equipotenti. In altre parole, a questi insegnanti è venuto spontaneo pensare che, essendo tutti gli insiemi citati infiniti, si possa concludere, in accordo con un passo di Galileo, che l'aggettivo "maggiore" non si possa utilizzare parlando di infinità; da ciò si trae la conseguenza che tutti gli insiemi di questo tipo sono null'altro che infiniti.
Ric.: Quindi per te, tutti gli insiemi infiniti hanno la stessa cardinalità?
B.: Cioè? Lo stesso numero? Sì, se sono infiniti!

6.2 Il cambio di convinzione

Per testare il grado di convincimento relativo alle affermazioni fornite dagli insegnanti sull'infinito matematico, si sono proposte le due dimostrazioni relative alle domande n. 3 e 9 seguite dalle domande n. 12 e 13 riportate nel paragrafo 5, oltre alla spiegazione della distinzione tra infinito potenziale e attuale. Tramite questa formazione si voleva valutare se gli insegnanti intervistati erano disposti a cambiare idea sulle proprie convinzioni, segno che il loro sapere non era poi così forte e profondo, o se invece rimanevano convinti di ciò che avevano inizialmente affermato.

Riportiamo le risposte alle domande proposte a seguito della formazione e dopo la consegna delle prime 11 domande del questionario, integrate con le affermazioni dello scambio di opinioni finale.

12) Dopo aver proposto la costruzione descritta nel paragrafo 5 relativa alla domanda n.3, che mostra come vi sia lo stesso numero di punti in due segmenti di lunghezze diverse; si è consegnata la domanda n. 12.
Le risposte a questa domanda, integrate con le affermazioni della discussione finale, rientrano tra i seguenti tipi:

• ***Non convinti della dimostrazione.*** Dei 16 insegnanti intervistati, 5 si dicono non convinti della dimostrazione:
Ric.: Vi ha convinto questa dimostrazione?
M.: A me mica tanto; per me un punto è un punto, anche se lo faccio più piccolo è pur sempre un punto. Guarda! (e segna una macchietta nera sul foglio). *Quindi se li faccio grandi uguali, come fanno ad essercene lo stesso numero?*
Ric.: Secondo te tra due punti ce n'è sempre un altro?
M.: No, se sono i due punti subito attaccati; se li disegno attaccati attaccati, al massimo dell'attaccato, vedrai che non ce ne sta un altro.

B.: Mmmh! Ma nel segmento AB ripassi per lo stesso punto quando le linee diventano più fitte. Non mi convince.
Per gli insegnanti che hanno mostrato di percepire il punto non come un ente astratto privo di dimensione, ma come un segno della matita avente una data dimensione (Tsamir, 1997; Acuña, 2005), risulta veramente difficile cogliere il senso di questa dimostrazione. In generale, chi la rifiuta lo fa principalmente perché ha costruito come stabile il modello di segmento come "collana".

• ***Convinti della dimostrazione.*** 9 insegnanti affermano di essersi convinti grazie alla dimostrazione che per alcuni, come A. e C., sembra veramente efficace e lampante:
A.: Che bella!, mi hai convinta.

C.: A me hai convinto, è proprio così.
A questi 9 insegnanti che si sono mostrati subito convinti dalla dimostrazione, abbiamo voluto far apparire qualche perplessità per mezzo di una domanda del tipo: *«Ma siete proprio certi?»*. L'intento era di osservare se gli insegnanti erano disposti a cambiare nuovamente idea, rivelando così una non reale convinzione, ma solo

"fiducia" in ciò che afferma il ricercatore. In effetti, 3 di loro mostrano a questo punto di non essere del tutto convinti, tornando all'affermazione di partenza, ossia che ci sono più punti in CD. [A proposito del cambio di opinione e della sua stabilità, si vedano: Arrigo e D'Amore (1999, 2002)].
Ric.: Ma siete proprio certi?
G.: No, no!, io rimango convinta che in CD ce ne sono di più, si vede.

R.: Non sono proprio sicura.
Da questi continui cambi di convinzione, si percepisce come il sapere degli insegnanti nei confronti dell'infinito matematico non siano forti e stabili.

• ***Fiducia nei matematici.*** Nella risposta di un insegnante si percepisce una sorta di "fiducia nei matematici", ma non una vera convinzione della dimostrazione:
A.: Se lo dite voi matematici, ci fidiamo!

• ***Incerti.*** Un insegnante mostra la necessità di avere qualche chiarimento, ma dopo un veloce confronto afferma di essere convinto:
M.: È perché hai preso quel punto lì, ma se ne prendevi un altro non tornava… guarda!
L'insegnante disegna una macchia - punto diversa dal punto di proiezione individuato dal ricercatore nella dimostrazione e manda delle semirette che intersecano il segmento più lungo ma non il più corto. Da queste considerazioni emergono difficoltà di capire che cos'è e come funziona una dimostrazione in matematica. Ma evitiamo qui considerazioni al riguardo.
Ric.: Sì, ma se proprio vuoi che il punto di proiezione sia quel punto che hai segnato, puoi fare una traslazione dei due segmenti e proiettare proprio da quel punto (si è effettuata la traslazione sul disegno di M.)*, d'altronde la traslazione non altera il numero di punti dei due segmenti.*
M.: Va beh, mi hai convinto.

13) Ai 16 insegnanti si è poi mostrata la corrispondenza biunivoca che permette di stabilire che la cardinalità dei numeri pari è la stessa dei numeri naturali e si è poi posta la domanda n. 13.
A questa sollecitazione, gli insegnanti rispondono nei seguenti due modi che sono stati di seguito integrati con la discussione finale:

• ***Rimangono dubbiosi.*** 6 insegnanti si mostrano poco convinti:
M.: Mi sembra un po' una forzatura.

N. : Che strano, nei pari mancano tutti i dispari per ottenere i naturali.

• ***Si dicono convinti.*** 10 insegnanti sostengono di essere convinti, ma in 2 appare soprattutto la "fiducia del ricercatore" come depositario del sapere.
Inoltre, dai colloqui emerge che tutti questi insegnanti che hanno accettato che alcuni insiemi infiniti sono tra loro equipotenti (come i numeri pari e i naturali), pensano che ciò sia legato all'infinità, generalizzando così che tutti gli insiemi infiniti lo siano. Questa misconcezione di *appiattimento* appare come un "miglioramento" rispetto alla misconcezione di *dipendenza* della cardinalità dalla "grandezza" dell'insieme; questo cambiamento di atteggiamento sembra una lenta e graduale scalata verso un modello corretto di infinito. La presenza del misconcetto *appiattimento* dei cardinali transfiniti, era comunque piuttosto prevedibile dato che gli insegnanti di scuola primaria non conoscono l'insieme dei numeri reali e quindi non possono far altro che generalizzare ciò che hanno appreso per gli insiemi che conoscono; essi non hanno la minima possibilità di accedere alla differenza tra cardinalità del numerabile e cardinalità del continuo.
A questo proposito riportiamo la seguente conversazione:
A.: Quindi tutti gli insiemi infiniti sono uguali.
Ric.: In che senso? Anche gli interi hanno la stessa cardinalità dei naturali?
A.: Beh, sì.
Ric.: E i razionali? Le frazioni?
A.: Per me sì.
Ric.: E i reali? I numeri che si ottengono usando le radici?
A.: Sì, tutti, tutti o sono tutti uguali, cioè infiniti, o non lo sono nessuno.
Da queste considerazioni emerge inoltre che, nelle accettazioni intuitive degli stessi insegnanti, convivono incoerenze come l'*appiattimento* e la *dipendenza* pur essendo in contraddizione tra loro. Si nota, in effetti, una generalizzata difficoltà degli insegnanti a rendersi conto della contraddizione di due affermazioni, il che avviene a nostro avviso come conseguenza della non conoscenza e padronanza dell'infinito matematico. D'altra parte, sulla non controllabilità di situazioni di incoerenza in questioni concernenti l'infinito si è già espressa la ricerca internazionale (D'Amore e Martini, 1998; Tall, 1990; Tirosh, 1990; Tsamir e Tirosh, 1994, 1997, 1999; Garbin, 2003).

Infinito potenziale ed attuale. Durante lo scambio di opinioni, diversi insegnanti hanno fornito affermazioni che rientrano in una visione potenziale dell'infinito; in effetti, anche quando alcuni insegnanti hanno proposto concezioni attribuibili all'infinito attuale, come: *«La retta è formata da infiniti punti»*, successivamente sono risultati incoerenti sostenendo che si dice retta solo per intendere un segmento che diventa sempre più lungo, ricadendo così in una visione potenziale dell'infinito.

R.: Diciamo che i numeri naturali sono infiniti, ma sappiamo che questo non significa nulla, perché non si possono quantificare! È come dire un numero così grande che non si riesce a dire; nel senso che puoi sempre andare avanti. Dire retta è come non dire niente, mica esiste, è solo per dire che è una linea sempre più lunga.

Si è quindi deciso di cercare di far cogliere agli insegnanti la duplice natura dell'infinito: potenziale e attuale, per valutare i loro eventuali cambi di convinzioni a questo proposito.

A questa sollecitazione gli insegnanti rispondono nel seguente modo:

- 10 insegnanti rimangono ancorati alla visione potenziale dell'infinito essendo a loro avviso più vicino al mondo sensibile; a questo proposito riportiamo uno stralcio di conversazione:

M.: Per me esiste solo l'infinito potenziale, l'altro non c'è, è pura fantasia; dimmi: dov'è?

Ric.: Parlando di retta…

M.: Ma la retta, dov'è? Non c'è, è un'invenzione quindi l'infinito attuale non c'è.

Ric.: Che cosa pensi della retta?

M.: Secondo me queste cose non andrebbero insegnate, almeno alle elementari, come fanno quei poveri bambini! Sì, tu lo puoi anche dire la retta è formata da infiniti punti, ma loro che cosa capiscono (non ci credo neanche io!), se non la vedono a quell'età non possono capire. Le cose le devono poter toccare con mano.

N.: Per me esistono cose veramente grandi, ma pur sempre finite, il resto non esiste.

- 6 insegnanti sembrano percepire il senso dell'infinito attuale. In particolare, 3 insegnanti si dichiarano eccitati dall'avvenuta scoperta della distinzione tra queste due concezioni.

A.: Non ci avevo mai pensato a questa distinzione, ma ora ho capito, riesco ad immaginarlo.

B.: Non ci avevo mai pensato, nessuno mi aveva fatto riflettere su questo problema, ma sinceramente io ho sempre pensato che fosse solo nel senso di procedere sempre di continuo. Però ora ho inteso la differenza.

Da quest'ultima affermazione si sente il disagio degli insegnanti di non aver avuto modo di riflettere su questioni così importanti che coinvolgono temi che dovrebbero, almeno in parte, dominare per evitare di formare misconcezioni nei loro allievi.

Sono stati tanti gli insegnanti che, alla fine del percorso di formazione, hanno manifestato il loro disagio su questo argomento ed esplicitato con forza il desiderio, anzi il bisogno, di saperne di più. A questo proposito si riportano di seguito gli interventi di 2 insegnanti:

M.: Ci vorrebbe qualcuno che ci faccia riflettere su queste cose e sull'importanza di trasferirli in modo corretto. Nella matematica che abbiamo fatto noi, non ci facevano riflettere su queste cose. Ci vorrebbe un po' di teoria a monte.

A.: Noi pecchiamo di semplificazione, senza studiare la teoria. Siamo convinte di averla, ma non l'abbiamo la teoria. Ci preoccupiamo di trasferirla in modo concreto, senza approfondire come funziona. Ma come possiamo fare se qualcuno non ci aiuta a cambiare?

7. Risposte alle domande formulate in 3

Siamo ora in grado di rispondere alle domande di ricerca formulate in 3.

R1. Gli insegnanti di scuola primaria possiedono numerose misconcezioni per quanto riguarda l'infinito matematico. Essi non hanno alcuna conoscenza di ciò che si intende per infinito matematico sia in senso matematico - epistemologico che cognitivo e questo deriva sicuramente dalla mancanza di uno studio specifico su questo argomento. L'infinito è, per gli insegnanti di scuola primaria, un concetto sconosciuto gestito solo in base al buon senso ed all'intuizione e per questo ridotto banalmente ad un'estensione del finito. Questo fatto è causa di modelli intuitivi che costituiscono misconcezioni. Non si sono rilevano particolari conoscenze matematiche possedute dagli insegnanti su questo tema. D'altra parte, in nessun corso per la formazione di insegnanti di scuola primaria si pone in evidenza l'importanza che ha questo tema per il processo di insegnamento – apprendimento.

R2. Gli insegnanti di scuola primaria possiedono misconcezioni sull'infinito matematico in ogni àmbito della matematica, in particolare sia nel contesto aritmetico che geometrico con la stessa influenza; ad esempio, accettano la nozione euclidea: «Il tutto è maggiore della parte» per il finito e tendono a considerarla vera anche per l'infinito cadendo nel misconcetto di *dipendenza* in entrambi gli àmbiti; ma l'"essere sottoinsieme proprio" e "avere meno elementi" sono espressioni che non vanno confuse se si parla di insiemi infiniti. Eppure l'insegnante di scuola primaria, avendo avuto durante la sua formazione solo continue conferme di quello che avviene nel finito, lo ha assunto come modello intuitivo assoluto. Ossia gli insegnanti tendono a generalizzare per l'infinito ogni concetto che vale nel finito: se un insieme A è sottoinsieme proprio di un insieme B, allora automaticamente la cardinalità di B è maggiore di quella di A. Alla costruzione di questo misconcetto collabora anche il modello intuitivo che possiedono gli insegnanti del segmento come filo formato da perline e che porta alla *dipendenza* da fatti relativi a misure. Molto presente è inoltre il misconcetto di *appiattimento* che però ha sicuramente una ricaduta didattica meno influente nella scuola primaria rispetto alla *dipendenza*. La retta come figura illimitata ed il conteggio senza fine dei numeri naturali forniscono agli insegnanti la capacità di vedere l'infinito solo in potenza e non in atto, il che crea gravi ostacoli didattici ai futuri allievi. A queste vanno aggiunte le altre convinzioni degli insegnanti relative all'infinito come sinonimo di illimitato, di indeterminato, di numero finito molto grande.

R3. Un gran numero di insegnanti nei quali si sono rilevate misconcezioni, dopo una prima formazione, risultano disposti a cambiare convinzione, ammettendo le loro carenze per quanto riguarda questo sapere ed esplicitando anzi il bisogno di saperne di più in questo àmbito. Tali insegnanti si dicono anche disposti a cambiare il proprio insegnamento solo se sostenuti da una formazione su questo tema; questo punto sarà oggetto esplicito di un successivo articolo. In effetti, dal nostro punto di vista, e da quello degli insegnanti stessi, occorre una maggiore formazione su questo tema, in modo da non affidare l'idea di infinito matematico ad un'impostazione puramente ed esclusivamente intuitiva; risulta in effetti necessario rivedere la lista dei contenuti da proporre agli insegnanti in via di formazione iniziale a qualsiasi livello scolastico, in modo che gli studenti non arrivino ad affrontare lo studio dell'Analisi alle superiori già con insuperabili misconcezioni alle spalle. La trattazione delle problematiche concernenti l'infinito attuale richiede infatti lo sviluppo di modelli intuitivi diversi e a volte addirittura opposti rispetto a quelli che si usano nel finito.

8. Conclusioni

In questa ricerca si sono messe in evidenza le specifiche misconcezioni possedute dagli insegnanti di scuola primaria nei confronti dell'infinito matematico, che rilevano una totale mancanza di conoscenza di questo sapere. Molti insegnanti coinvolti in questo lavoro di ricerca hanno ammesso di non conoscere questo argomento e hanno esplicitato il bisogno di saperne di più.

Il problema di fondo è che "nessuna grandezza sensibile è infinita", quindi questi argomenti risultano essere contrari all'intuizione e distaccati dall'esperienza quotidiana (Gilbert e Rouche, 2001) e da chi non ha mai avuto modo di riflettere in modo esplicito su questi concetti.

A tal proposito, Tsamir (2000) afferma: «La teoria cantoriana degli insiemi e il concetto di infinito attuale sono considerati contrari all'intuizione a tali da generare perplessità, pertanto non sono facilmente acquisibili; per insegnarli è necessaria una speciale sensibilità didattica». Ma se ai maestri questo argomento non è mai stato insegnato, è ovvio che essi non potranno che essere legati esclusivamente alle loro intuizioni, al buon senso, che la storia della matematica evidenzia come contrario alla teoria (l'infinito matematico è stato definitivamente sistemato da un punto di vista scientifico solo verso la fine del XIX secolo, dunque piuttosto recentemente, rispetto alla sua più che bimillenaria storia); di conseguenza la "sensibilità didattica" di cui parla Tsamir, non potrà essere presente negli insegnanti di scuola primaria, senza adeguata formazione esplicita.

A causa delle misconcezioni possedute dagli insegnanti, è possibile fornire immagini ai propri allievi lontane dalla conoscenza matematica, misconcezioni che risultano di ostacolo nel momento in cui gli studenti si trovano a dover affrontare corsi di Analisi alle superiori, ma anche prima, quando nella scuola media vengono proposti concetti come: la densità di Q, i numeri irrazionali, il rapporto tra il lato e la diagonale di un quadrato, la continuità di R o dell'insieme dei punti della retta ed altri ancora. In effetti, alle superiori gli studenti dovranno "scontrarsi" con la necessaria concezione attuale dell'infinito che potrebbe risultare (e che di fatto risulta) di difficoltà concettuale insormontabile, dato che negli anni precedenti potrebbe essersi formato un modello intuitivo di infinito ben radicato, legato solamente alle proprie intuizioni e a quelle dei loro insegnanti, ma lontane dal mondo della matematica.

Queste considerazioni mettono in evidenza che le grandi difficoltà rilevate negli studenti in numerose ricerche, per quanto riguarda l'infinito matematico, non sono dovute solamente agli ostacoli epistemologici, ma anche agli ostacoli didattici creati dalle convinzioni degli insegnanti di scuola primaria. È anche molto probabile che le lacune su questo tema non siano un problema esclusivo della scuola primaria, ma che siano invece diffuse ad ogni livello scolastico tra tutti quegli insegnanti a cui non è stata data l'occasione di riflettere su questo argomento.
I risultati di questa ricerca mettono quindi in evidenza che l'infinito matematico è risultato fino ad ora un argomento troppo sottovalutato, soprattutto per quanto concerne la formazione degli insegnanti. Bisogna quindi tentare di inibire e superare i modelli che provocano ostacoli nella mente degli insegnanti, e di conseguenza degli allievi, proponendo corsi di formazione per insegnanti sulle peculiarità dell'infinito, oltre che sui risultati rilevati dai ricercatori in didattica della matematica su questo tema. Tali corsi devono essere basati sulla discussione, sul confronto con gli aspetti storici, che permettano di partire dalle idee intuitive primarie per poi evolvere in nuove, più evolute, convinzioni.

Bibliografia

Acuña C. (2005).¿Cuántos puntos hay? Concepciones de los estudiantes en tareas de construcción. *Relime.* 8, 1, 7-23.

Arrigo G., D'Amore B. (1999). "Lo vedo ma non ci credo...". Ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di un teorema di Georg Cantor che coinvolge l'infinito attuale. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 22B, 5, 465-494.

Arrigo G., D'Amore B. (2002). "Lo vedo ma non ci credo...", seconda parte. Ancora su ostacoli epistemologici e didattici al processo di comprensione di alcuni teoremi di Georg Cantor. *La matematica e la sua didattica.* 1, 4-57.

Bagni G.T. (1998). L'infinitesimo attuale e potenziale nelle concezioni degli studenti prima e dopo lo studio dell'Analisi. *L'educazione matematica*. XIX, V, 3, 2, 110-121.

Bagni G.T. (2001). Infinito e infinitesimo potenziale e attuale: una sfida per la Scuola Secondaria Superiore. *Bollettino dei docenti di matematica*. 42, 9-20.

Chapman O. (2002). Belief structure and inservice high schol mathematics teacher growth. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?* (177-194). Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P.

Courant R., Robbins H. (1941). *What is Mathematics? An Elementary Approach to Ideas and Methods.* Oxford University Press, New York. [trad. it. (1971). *Che cos'è la matematica?* Torino: Bollati Boringhieri].

D'Amore B. (1996). L'infinito: storia di conflitti, di sorprese, di dubbi. *La matematica e la sua didattica*. 3, 322-335.

D'Amore B. (1997). Bibliografia in *progress* sul tema: «L'infinito in didattica della matematica». *La matematica e la sua didattica*. 3, 289-305.

D'Amore B., Arrigo G., Bonilla Estévez M., Fandiño Pinilla M.I., Piatti A., Rojas Garzón P.J., Rodríguez Bejarano J., Romero Cruz J. H., Sbaragli S. (2004). Il "senso dell'infinito". *La matematica e la sua didattica*. 4, 46-83.

D'Amore B., Fandiño Pinilla M.I. (2004). Cambi di convinzione in insegnanti di matematica di scuola secondaria superiore in formazione iniziale. *La matematica e la sua didattica*. 3, 27-50.

D'Amore B., Martini B. (1998). Il "contesto naturale". Influenza della lingua naturale nelle risposte a test di matematica. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* 19A, 3, 223-246.

D'Amore B., Sbaragli S. (2005). Analisi semantica e didattica dell'idea di "misconcezione". *La matematica e la sua didattica*. 2. 139-163.

da Ponte J.P., Berger P., Cannizzaro L., Contreras L.C., Safuanov I. (1999). Research on teachers' beliefs: empirical work and methodological challenges. In: Krainer K., Goffree F., Berger P. (Eds.). *Proceedings of the First Conference of the European Society for Research in Mathematics Education*, *CERME*-1, Forschungsinstitut für Mathematikdidaktik, Osnabrück. 3, 79-97.

Duval R. (1983). L'obstacle de dedoublement des objects mathématiques. *Educational Studies in Mathematics.* 14, 385-414.

Fennema E., Franke M.L. (1992). Teachers' Knowledge and its Impact. In: Grows D. (Ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning.*. New York: Macmillan Publishing Company. 147-164.

Fischbein E. (1985). Ostacoli intuitivi nella risoluzione di problemi aritmetici elementari. In: Chini Artusi L. (ed.) *Numeri e operazioni nella scuola di base.* Bologna: Zanichelli-UMI. 122-132.

Fischbein E. (1992a). Modelli taciti e ragionamento matematico. In: Fischbein E., Vergnaud G. *Matematica e scuola: teorie ed esperienze.* Bologna: Pitagora. 25-38.

Fischbein E. (1992b). Intuizione e dimostrazione. In: Fischbein E., Vergnaud G. (1992). *Matematica a scuola: teorie ed esperienze*. Bologna: Pitagora. 1-24.

Fischbein E. (2001). Tacit models and infinity. *Educational Studies in Mathematics.* Infinity – The Never-ending Struggle. 48, 2-3, 309-329.

Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. (1994). The irrational numbers and the corresponding epistemological obstacles. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisboa. 2, 352-359.

Fischbein E., Jehiam R., Cohen D. (1995). The concept of irrational numbers in high-school students and prospective teachers. *Educational Studies in Mathematics*. 29, 29-44.

Fischbein E., Tirosh D., Hess P. (1979). The intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics.* 10, 3-40.

Garbin S. (2003). Incoherencias y conexiones: el caso del infinito actual con estudiantes universitarios. Primera fase del estudio. Relme 16, Habana, Cuba, *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa*.

Garbin S. (2005). ¿Cómo piensan los alumnos entre 16 y 20 años el infinito? La influencia de los modelos; las rapresentaciones y los lenguajes matemàticos. *Relime.* 8, 2, 169-193.

Gilbert T., Rouche N. (2001). *La notion d'infini. L'infini mathématique entre mystère et raison.* Paris: Ellipses.

Gimenez J. (1990). About intuitional knowledge of density in Elementary School. *Atti del XIV PME.* Mexico. 19-26.

Hilbert D. (1925-1989). On the infinite. In: Benacerraf P., Putnam H. (Eds.) *Philosophy of mathematics*. New York: Cambridge University Press.

Hoyles C. (1992). Mathematics teaching and mathematics teachers: a meta-case study. *For the learning of mathematics*. 12, 3, 32-44.

Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?*. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac.P.

Llinares S. (1996). Conocimiento profesional del profesor de matemáticas. Conocimiento, creencias y contexto en relación a la noción de función. En da Ponte J.P. et al. (Eds.) *Desenvolvimiento professional dos profesores de matemática. Que formação?* SEM-SPCE, Lisboa, Portugal. 47-82.

Llinares S. (1999). Conocimiento y práctica profesional del profesor de matemáticas: características de una agenda de investigación. *Zetetike*. 12, 7, 9-36.

Llinares S. (2002). Participation and reification in learning to teach: the role of knowledge and beliefs. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?*. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P. 195-210.

Moreno L.E., Waldegg G. (1991). The conceptual evolution of actual mathematical infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 22, 211-231.

Perret Clermont A.N., Schubauer Leoni M.L., Trognon A. (1992). L'extorsion des réponses en situation asymmetrique. *Verbum* (Conversations adulte/enfants). 1/2, 3-32.

Pehkonen, E. (1994). On teachers' beliefs and changing mathematics teaching. *Journal fur Mathematik-Didaktik.* 15, 3/4, 177-209.

Romero i Chesa C., Azcárate Giménez C. (1994). An inquiry into the concept images of the continuum. *Proceedings of the PME XVIII*. Lisbon. 185-192.

Sbaragli S. (2003). Le convinzioni degli insegnanti elementari sull'infinito matematico. *L'insegnamento della matematica e delle scienze integrate.* Prima parte: 26A, 2, 155-186. Seconda parte: 26A, 5, 573-588.

Sbaragli S. (2004). Le convinzioni degli insegnanti sull'infinito matematico. *Tesi di Dottorato di ricerca.* Università Komenského di Bratislava, direttore Ivan Treskansky, advisor Bruno D'Amore. Versione in italiano e in inglese nel sito: http://math.unipa.it/~grim/tesi_it.htm.

Sbaragli S. (2005a). Misconcezioni "inevitabili" e misconcezioni "evitabili". *La matematica e la sua didattica.* 1. 57-71.

Sbaragli S. (2005b). L'importanza delle diverse rappresentazioni semiotiche. Il caso degli enti primitivi della geometria. *Bollettino dei Docenti di Matematica.* Bellinzona (Svizzera). 50. 69-76.

Schneider M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des «découpages infinis» des surfaces et des solides. *Recherches en Didactiques des Mathématiques.* 23, 241-294.

Schoenfeld A.H. (1992). Learning to think mathematically: problem solving, metacognition and sense making in mathematics. In: Grows A.D. (Ed.) (1992). *Handbook of research on mathematics learning and teaching*. New York: MacMillan. 334-370.

Shama G., Movshovitz Hadar N. (1994). Is infinity a wholes number? *Proceedings of the XVIII PME*. Lisbon. 2, 265-272.

Strehle E.L., Whatley A., Kurz K.A., Hausfather S.J. (2002). Narratives of Collaboration: Inquiring into Technology Integration in Teacher Education. *Journal of Technology and Teacher Education*. 10, 1, 27-47.

Tall D. (1980). The notion of infinity measuring number and its relevance in the intuition of infinity. *Educational Studies in Mathematics*. 11, 271-284.

Tall D. (1990). Inconsistencies in the learning of calculus and analysis. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* 12, 3-4, 49-64.

Tall D. (2001). Natural and formal infinities. *Educational Studies in Mathematics.* Infinity – The Never-ending Struggle. 48, 2-3.

Thompson A. G. (1992). Teachers' Beliefs and Conceptions: a Synthesis of the Research. In: Grouws D. (Ed.) (1992). *Handbook of Research on Mathematics Learning and Teaching*. (127-145). New York: Macmillan Publishing Company.

Tirosh D. (1990). Inconsistencies in students' mathematical constructs. *Focus on Learning Problems in Mathematics.* 12, 111-129.

Tirosh D., Graeber A. (2003). Challenging and changing mathematics teaching classroom practice. In: Bishop A.J., Clements M.A., Keitel C., Kilpatrick J., Leung F.K.S. (Eds.). *Second International Handbook of Mathematics Education*. Dordrecht: Kluwer Academic Publishers. 643-687.

Törner G. (2002). Mathematical beliefs. A search of a common ground: some theoretical considerations on structuring beliefs, some research questions, and some phenomenological observations. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.) (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?*. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P. 73-94.

Tsamir P. (1997). Representations of points. *Proceedings of the 22nd Conference of the International Group for the PME*. 4, 246-253.

Tsamir P. (2000). La comprensione dell'infinito attuale nei futuri insegnanti. *La matematica e la sua didattica.* 2, 167-207.

Tsamir P., Tirosh D. (1992). Students' awareness of inconsistent ideas about actual infinity. *Proceedings of the XVI PME*. Durham NH. 90-97.

Tsamir P., Tirosh D. (1994). Comparing infinite sets: intuition and representations. *Proceedings of the XVIII PME*. Lisbon, Portugal. 4, 345-352.

Tsamir P., Tirosh D. (1997). Metacognizione e coerenza: il caso dell'infinito. *La matematica e la sua didattica*. 2, 122-131.

Tsamir P., Tirosh D. (1999). Consistency and representations: the case of actual infinity. *Journal for Research in Mathematics Education*. 30, 2, 213-219.

Waldegg G. (1993). La comparaison des ensembles infinis: un cas de résistance à l'instruction. *Annales de Didactique et de Sciences cognitives*. 5, 19-36.

Wilson M., Cooney T.J. (2002). Mathematics teacher change and development. The role of beliefs. In: Leder G.C., Pehkonen E., Törner G. (Eds.). (2002). *Beliefs: A hidden variable on mathematics education?*. Dordrecht – Boston – London: Kluwer Ac. P. 127-148.

Esprimo la più sincera e profonda gratitudine a Bruno D'Amore, ispiratore e paziente lettore di questo articolo, che mi ha suggerito diverse modifiche ed integrazioni e che mi ha consigliato alcuni testi che ora figurano in bibliografia.